Система нелинейных уравнений.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2^2 - 1 = 0 \\ 3x_1^2 - x_2 - 2 = 0 \end{cases}$$ введем обозначение $$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2^2 - 1$$ $$f_2(x_1, x_2) = 3x_1^2 - x_2 - 2$$

В общем случаи систему нелинейных уравнений можно записать как:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_n(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$ или $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$.

Решением СНУ является такой вектор $\vec{x}^*$ при подстановке которого в систему последняя обращается в тождество.
Для решения преобразуем исходную систему нелинейных уравнений к эквивалентному виду $\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{x})$. Выберем некоторое начальное приближение $\vec{x}^{(0)}$, и последующие приближения найдем по формулам $\vec{x}^{(1)} = \vec{\varphi}(\vec{x}^{(0)})$, $\vec{x}^{(2)} = \vec{\varphi}(\vec{x}^{(1)})$, $\vec{x}^{(3)} = \vec{\varphi}(\vec{x}^{(2)})$, ……., а произвольное приближение запишем как: $\vec{x}^{(k)} = \vec{\varphi}(\vec{x}^{(k-1)})$. На каждой итерации вычисляем вектор $\Delta\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}$. И проверяем условие окончания итерационного процесса $\|\Delta\vec{x}^{(k)}\| \le \varepsilon$, где ε заданная точность.

Метод простых итераций.

Решить приведенную выше систему с точностью ε=0.1 и начальным приближением $\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$.

Преобразуем каждое уравнение

$$x_1 = \varphi_1(\vec{x}) = \frac{x_2^2 + 1}{2}$$

$$x_2 = \varphi_2(\vec{x}) = 3x_1^2 - 2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\vec{x}^{(0)}) \\ \varphi_2(\vec{x}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(0.5^2+1}{2} \\ 3\cdot 0.5^2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.625 \\ -1.25 \end{bmatrix}; \quad \Delta\vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ -1.75 \end{bmatrix}; \ \|\Delta\vec{x}^{(1)}\| = 1.7544$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\vec{x}^{(1)}) \\ \varphi_2(\vec{x}^{(1)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-1.25^2+1}{2} \\ 3\cdot 0.625^2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.281 \\ -0.828 \end{bmatrix}; \quad \Delta\vec{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.656 \\ 0.422 \end{bmatrix}; \ \|\Delta\vec{x}^{(2)}\| = 0.7802$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\vec{x}^{(2)}) \\ \varphi_2(\vec{x}^{(2)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(-0.828^2+1}{2} \\ 3\cdot 1.281^2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.843 \\ 2.924 \end{bmatrix}; \quad \Delta\vec{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 - 0.438 \\ 3.753 \end{bmatrix}; \ \|\Delta\vec{x}^{(3)}\| = 3.7784$$

Итерационный процесс расходится.

Попробуем, по другому осуществить преобразование.

$$x_1 = \varphi_1(\vec{x}) = \sqrt{\frac{x_2+2}{3}}$$

$$x_2 = \varphi_2(\vec{x}) = \sqrt{2\cdot x_1 - 1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \varphi_1(\vec{x}^{(0)}) \\ \varphi_2(\vec{x}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{0.5+2}{3}} \\ \sqrt{2\cdot 0.5-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.913 \\ 0.000 \end{bmatrix}; \quad \Delta\vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.413 \\ -0.500 \end{bmatrix}; \ \|\Delta\vec{x}^{(1)}\| = 0.648$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.816 \\ 0.909 \end{bmatrix}; \ \|\Delta\vec{x}^{(2)}\| = 0.9138 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.985 \\ 0.796 \end{bmatrix}; \ \|\Delta\vec{x}^{(3)}\| = 0.202$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.965 \\ 0.985 \end{bmatrix}; \ \|\Delta\vec{x}^{(4)}\| = 0.189 \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.997 \\ 0.965 \end{bmatrix}; \ \|\Delta\vec{x}^{(5)}\| = 0.038$$

Процесс сходится к решению.

Если не удаётся преобразовать исходную СНУ к итерационному виду, который будет сходится, то можно воспользоваться общим приемом.

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}; \quad \bar{\bar{\lambda}}\cdot \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}; \quad \vec{x} = \vec{x} + \bar{\bar{\lambda}}\cdot \vec{f}(\vec{x}).$$

Итерационную формулу запишем

$\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + \bar{\bar{\lambda}} \cdot \vec{f}(\vec{x}^{(k-1)})$, где матрицу $\bar{\bar{\lambda}}$ можно представить диагональной, а подбором значений элементов, можно добиться сходимость итерационного процесса.

Метод Ньютона-Рафсона

Пусть известно некоторое приближение $\vec{x}^{(k-1)}$ к решению $\vec{x}^*$ тогда запишем исходную систему в виде $\vec{f}(\vec{x}^{(k-1)} + \Delta\vec{x}^{(k)}) = \vec{0}$, где $\Delta\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^* - \vec{x}^{(k-1)}$. Разложим функцию в ряд Тейлора и ограничимся линейными членами.

$$\vec{f}(\vec{x}^{(k-1)} + \Delta\vec{x}^{(k)}) = \vec{f}(\vec{x}^{(k-1)}) + \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^{(k-1)})}{\partial \vec{x}^{(k-1)}} \Delta\vec{x}^{(k)} = \vec{0} \text{ и } \frac{\partial \vec{f}(\vec{x}^{(k-1)})}{\partial \vec{x}^{(k-1)}} \Delta\vec{x}^{(k)} = -\vec{f}(\vec{x}^{(k-1)})$$

Это система линейных уравнений относительно $\Delta\vec{x}^{(k)}$.

Обозначим матрицу частных производных, как матрицу Якоби

$$\bar{\bar{J}} = \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_2} & . & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_2} & . & \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_2} & . & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Тогда $\Delta\vec{x}^{(k)} = \left[\bar{\bar{J}}^{(k-1)}\right]^{-1} \cdot (-\vec{f}(\vec{x}^{(k-1)}))$, а новое приближение к решению СНУ будет иметь вид:

$\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + \Delta\vec{x}^{(k)}$ или $\vec{x}^{(k)} = \vec{x}^{(k-1)} + \left[\bar{\bar{J}}^{(k-1)}\right]^{-1} \cdot (-\vec{f}(\vec{x}^{(k-1)}))$.

Условие окончания итерационного процесса является выполнения неравенства $\Delta \vec{x}^{(k)} \le \varepsilon$, где $\Delta \vec{x}^{(k)} = \| \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)} \|$.

Решить приведенный выше пример. $\vec{x}^{0} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ и $[J] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \cdot x_2 \\ 6 \cdot x_1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(0)} - \begin{bmatrix} 2 & -2 \cdot x_2^0 \\ 6 \cdot x_1^0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^{(0)}) \\ f_2(\vec{x}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.75 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.25 \\ -1.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.25 \end{bmatrix} \qquad \Delta \vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.75 \end{bmatrix}; \ \| \Delta \vec{x}^{(1)} \| = 3.132$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.323 \\ 1.878 \end{bmatrix}; \ \| \Delta \vec{x}^{(2)} \| = 1.53$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1.070 \\ 1.243 \end{bmatrix}; \ \| \Delta \vec{x}^{(3)} \| = 0.684$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1.007 \\ 1.029 \end{bmatrix}; \ \| \Delta \vec{x}^{(4)} \| = 0.223$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{(5)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.001 \end{bmatrix}; \ \| \Delta \vec{x}^{(5)} \| = 0.029$$