Решение уравнения с одним неизвестным

Дано уравнение в виде f(x)=0, где f(x) некоторая функция переменной x. Число x^* называется корнем или решением данного уравнения, если при подстановке $x=x^*$ в уравнение последнее обращается в тождество $f(x^*)=0$. Число x^* называют также нулем функции y=f(x).

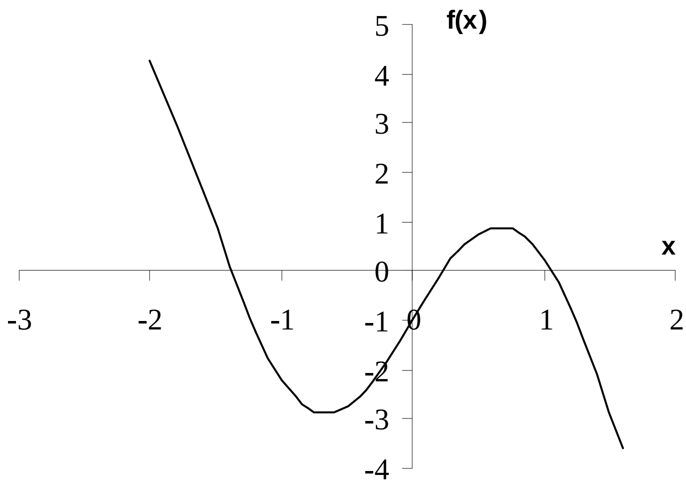
В общем случае уравнение может иметь одно или несколько корней, как действительных, так и комплексных. Нахождение действительных корней с заданной точностью можно разбить на два этапа. Сначала корни отделяются, т.е. определяются отрезки, которые содержат по оному корню уравнения; а затем уточняются, т.е. вычисляются с требуемой точностью ε. Отделение корней уравнения f(x)=0, в области определения, непрерывной функции f(x), можно осуществлять несколькими способами:

Табулированием – составлением таблицы из равноотстоящих значений независимой переменной x и соответствующих значений функции и определение отрезков в которых смежные значения функции имеют различные знаки и следовательно содержат нулевые значения функции.

Графический - строим график функции f(x) и определяем минимальные отрезки, включающие точки пересечения графика функции с осью x.

пример f(x) = 3*sin(2*x)-1.5*x-1=0

x	f(x)
-2,00	4,270
-1,60	1,575
-1,20	-1,226
-0,80	-2,799
-0,40	-2,552
0,00	-1,000
0,40	0,552
0,80	0,799
1,20	-0,774
1,60	-3,575



Уточнение корня на отрезке [a,b], в котором локализован только один корень, осуществляется итерационными методами, в которых последовательно, шаг за шагом, производится уточнение начального приближения корня. Итерацией называется совокупность вычислительных операций, приводящих к новому приближенному значению корня. Если каждое последующее приближение $x^{(k)}$ (k=1,2,3,…) находится все ближе к точному значению, говорят, что метод сходится. В противном случае метод расходится. Для реализации итерационного процесса должны быть заданы начальное приближение $x^{(0)}$ и точность ε, с которой найти решение уравнения. Условие окончание имеет вид: $|x^{(k)}-x^{(k-1)}| \leq \cdot\varepsilon$. Все методы уточнения корней можно разделить на две группы: безусловной и условной сходимости.

Методы безусловной сходимости

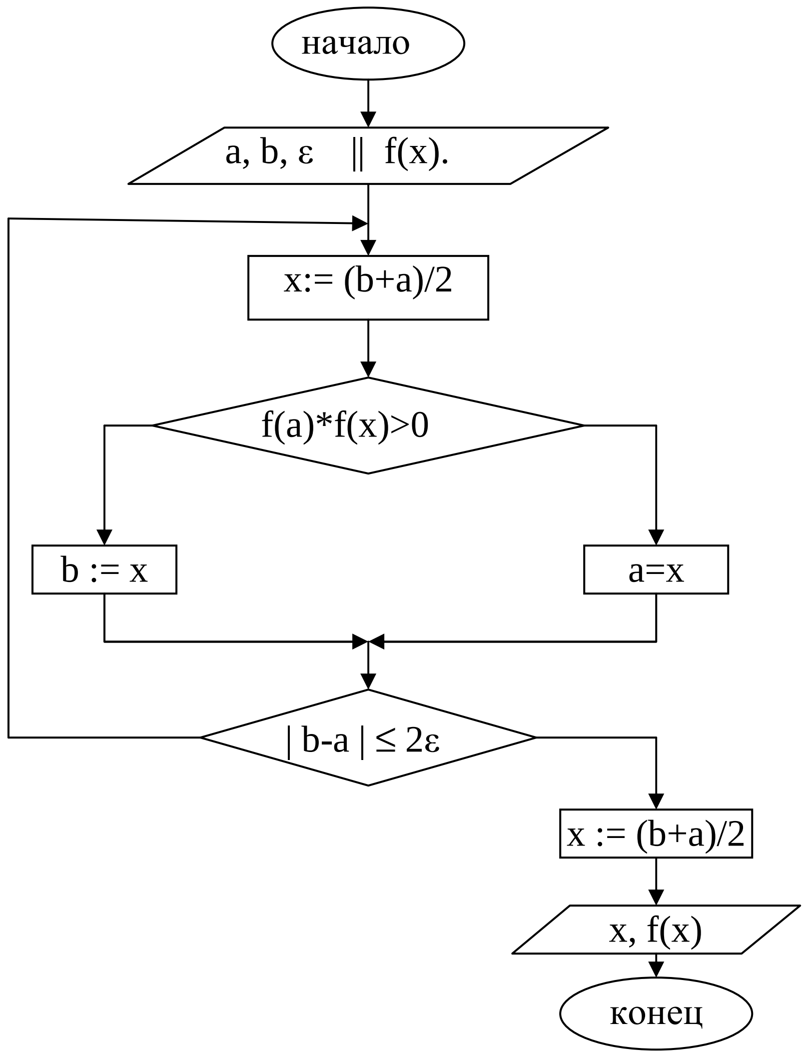
Метод половинного деления

В этом методе на каждой итерации новое приближение определяется как: $x^{(k)}=(a^{(k-1)}+b^{(k-1)})/2$, где к – номер итерации.

Алгоритм

1. Задаем функцию f(x), отрезок $[a^{(0)},b^{(0)}]$, точность ε и k=1.
2. Вычисляем приближение $x^{(k)}=(a^{(k-1)}+b^{(k-1)})/2$
3. Определяем новый отрезок $[a^{(k)},b^{(k)}]$. Проверяем, если $f(a^{(k-1)})*f(x^{(k)})>0$, то $a^{(k)}=x^{(k)}$ и $b^{(k)}=b^{(k-1)}$, иначе $a^{(k)}=a^{(k-1)}$ и $b^{(k)}=x^{(k)}$.
4. Проверяем условие окончания, если $|b^{(k)}-a^{(k)}| \leq \cdot 2\varepsilon$, то за ответ принимаем значение равное $x=(a^{(k)}+b^{(k)})/2$ и переходим на пункт 5, иначе k=k+1 и переходим на пункт 2.
5. выводим x и f(x).

Блок-схема



Решим предыдущий пример при a= -1.6 b= -1.2 и ε= 0.01 т.е. 2ε = 0.02

a	b	x	f(a)	f(x)	|b-a|
-1,6	-1,2	-1,4	1,575	0,095	0.4
-1,4	-1,2	-1,3	0,095	-0,597	0.2
-1,4	-1,3	-1,35	0,095	-0,257	0.1
-1,4	-1,35	-1,375	0,095	-0,082	0.05
-1,4	-1,375	-1,3875	0,095	0,006	0.025
-1,3875	-1,375	-1,3812		-0,038	0.012

x= –1,38±0.01 f(x) = –0,038 (невязка)

Методы условной сходимости

Преобразуем исходное уравнение f(x)=0 к эквивалентному виду x=φ(x). Тогда на каждой итерации новое приближение будем определять как: $x^{(1)} = \varphi(x^{(0)})$, $x^{(2)} = \varphi(x^{(1)})$, $x^{(3)} = \varphi(x^{(2)})$,….., т.е. $x^{(K)} = \varphi(x^{(k-1)})$, k=1,2,3… . За $x^{(0)}$ принимают любое число на заданном отрезке [a;b]. Вид функции φ(x) определим исходя из достаточного условия сходимости, которое записывается как: $|\varphi'(x)| < 1$, для всех значений x отрезка [a;b], т.е. максимальная производная на заданном отрезке должна быть меньше единицы.

Метод простых итераций

Для уравнения $x^2-5=0$ можно положить φ(x)=5/x или φ(x)=(1/2)(x+5/x) и соответствующие итерационные формулы будут иметь вид $x^{(k)}=5/x^{(k-1)}$ и $x^{(k)}=(1/2)(x_i^{(k-1)}+5/x^{(k-1)})$. В первом случаи метод расходится, а во втором сходится.

Общий подход для получения итерационной формулы x=φ(x)

Помножим обе части уравнения f(x)=0 на множитель β, и прибавим к обеим частям по x, тогда итерационная формула будет иметь вид:

$$x = \varphi(x) = x + \beta f(x)$$

Определить множитель β можно из достаточного условия сходимости.

$$|\varphi'(x)| < 1$$

$$\varphi'(x) = 1 + \beta f'(x)$$

$$|1 + \beta f'(x)| < 1$$

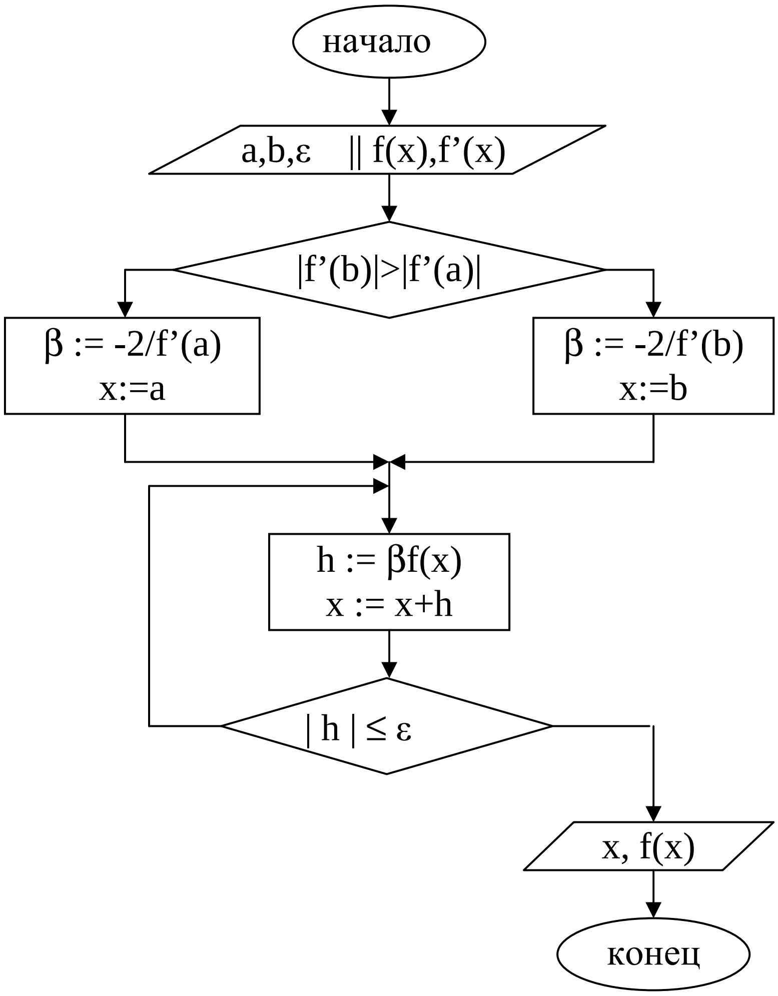
$$-1 < 1 + \beta f'(x) < 1$$

$$-2 < \beta f'(x) < 0.$$

Мы должны выбрать максимальную по модулю производную |f”(x)| на заданном отрезке.

$$|f'(b)|>|f'(a)| \quad \beta = -2/f'(b),\text{иначе} \quad \beta = -2/ f'(a)$$

Блок-схема



Пример: $f(x) = 3\sin(2x)-1.5x-1$ $f'(x)=6\cos(2x)-1.5$ $\varepsilon=0.01$ $a = -1,6$ $b = -1,2$
$f'(a) = -7,489$ $f'(b) = -5,924$ $\lambda = 0,267 \approx 0.2$
$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \lambda(3\sin(2x^{(k-1)})-1.5x^{(k-1)}-1)$

k	$x^{(k-1)}$	$f(x^{(k-1)})$	h	$\varphi(x^{(k-1)})$
1	-1,6	1,5751	0,3150	-1,2850
2	-1,2850	-0,6956	-0,1391	-1,4241
3	-1,4241	0,2685	0,05370	-1,3704
4	-1,3704	-0,1149	-0,0230	-1,3934
5	-1,3934	0,0477	0,0095	-1,3838
	-1,3838	-0,0201		

Ответ: $x = -1,38 \pm 0.01$ $f(x) = -0,020$

Метод Ньютона или касательных

Пусть известно некоторое приближение $x^{(k-1)}$ к решению x^* уравнения $f(x)=0$. Тогда исходное уравнение можно записать в виде $f(x^{(k-1)}+\Delta x^{(k)})=0$,
где $\Delta x^{(k)}= x^* - x^{(k-1)}$. разложим функцию в ряд Тейлора и ограничимся линейными членами.

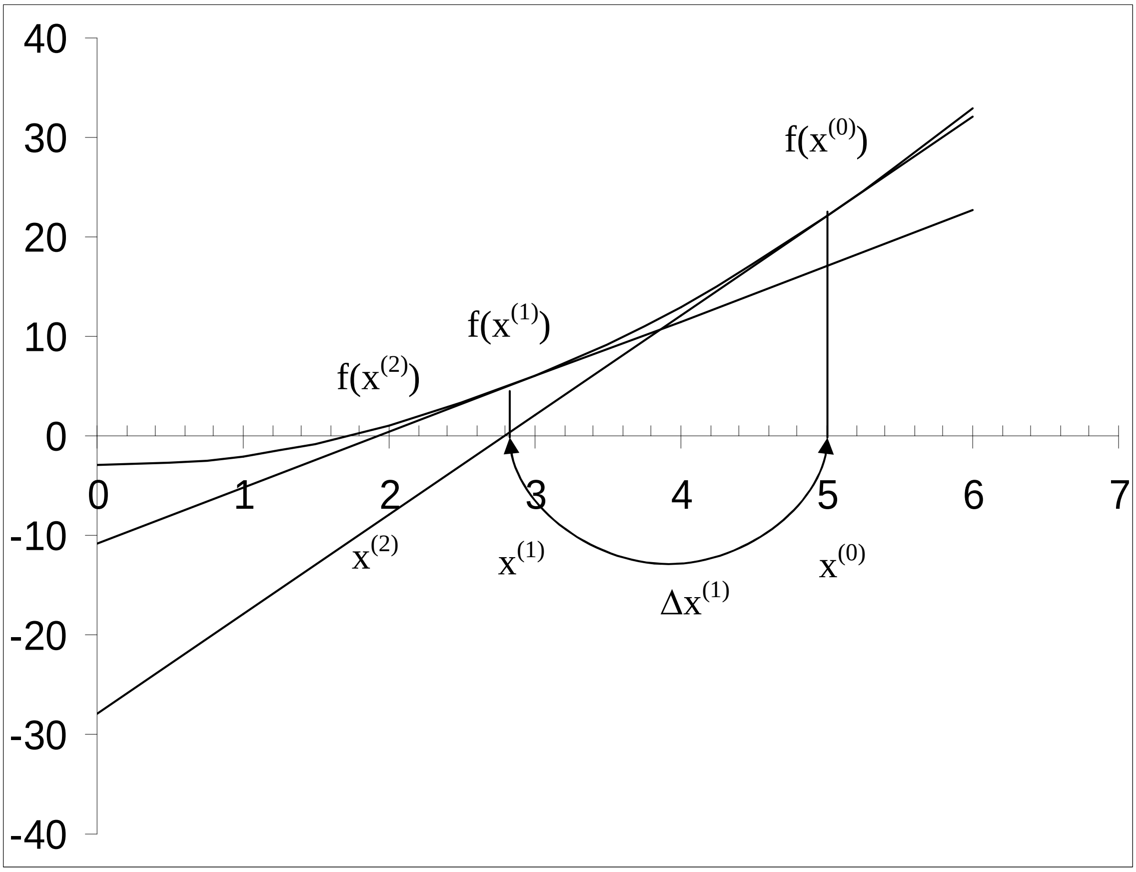
$f(x^{(k-1)}+\Delta x^{(k)}) = f(x^{(k-1)})+ f'(x^{(k-1)})\Delta x^{(k)} = 0$ откуда $\Delta x^{(k)}) = - f(x^{(k-1)})/ f'(x^{(k-1)})$

$x^*= x^{(k-1)}+ \Delta x^{(k)})= x^{(k-1)}- f(x^{(k-1)})/ f'(x^{(k-1)})$

Полученное значение принимаем за новое приближение к решению. Тогда итерационную формулу запишем как:

$x^{(k)} = \varphi(x^{(k-1)}) = x^{(k-1)}- f(x^{(k-1)})/ f'(x^{(k-1)})$

Графическая иллюстрация.



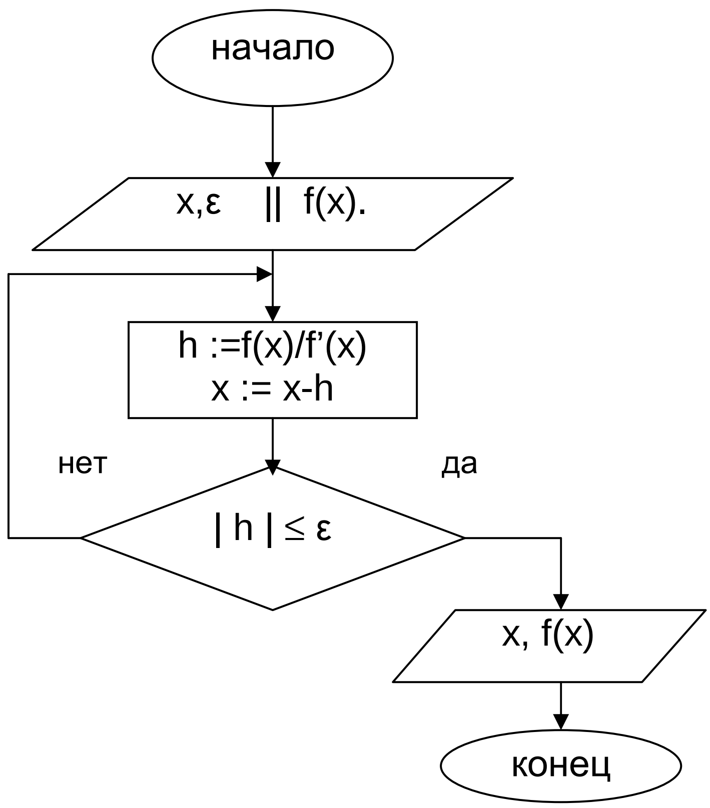
На каждой итерации, за новое приближение к корню $x^{(k)}$ принимается точка пересечения касательной к графику, построенной в точке $f(x^{(k-1)})$ с осью абсцисс x:

$tg(\beta)= f'(x^{(k-1)})= f(x^{(k-1)})/\Delta x^{(k)}$

За начальное приближение к корню $x^{(0)}$ принимаем одну из границ отрезка [a; b], содержащего один корень.

1. Задаем функцию f(x) отрезок [a;b] и точность ε. За начальное приближение x принимаем одну из границ заданного отрезка [a,b] x=b.
2. Вычисляем приращение значение шага h= $f(x^{(k-1)})/f'(x^{(k-1)})$ и новое приближение, как x = x-h.
3. Проверяем условие окончания если | h | ≤ ε, то выводим последнее значение x и f(x). Иначе перейдем на пункт 2

Блок схема:



Пример a = -1.6 b = -1.2 ε = 0.01 f(x)=3sin(2x)-1.5x-1 f'(x)=6cos(2x)-1.5
x=a=1.6

x	f(x)	f'(x)	h	□(x)
-1,6	1,5751	-7,4898	-0,2103	-1,3897
-1,3897	0,0216	-7,1107	-0,0030	-1,3867

Ответ: x = 1,387± 0.01 f(x)=0,00002