ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Пусть на отрезке [a; b] определена непрерывная функция f(x) (рис. 1). Требуется определить значение определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

которое численно равно площади S фигуры, ограниченной графиком функции f(x) и осью x, на заданном отрезке [a; b]. Для приближенного вычисления площади, разобьем отрезок [a; b] на n равных элементарных отрезков точками:

$$x_0=a,\ x_1= a+h,\ x_2=x_1+h,\dots,x_i=x_{i-1}+h,\dots,x_n=b, \text{ где } h=\frac{b-a}{n} \text{ – шаг разбиения.}$$

Значение функции f(x) в точках разбиения x_i обозначим через y_i.

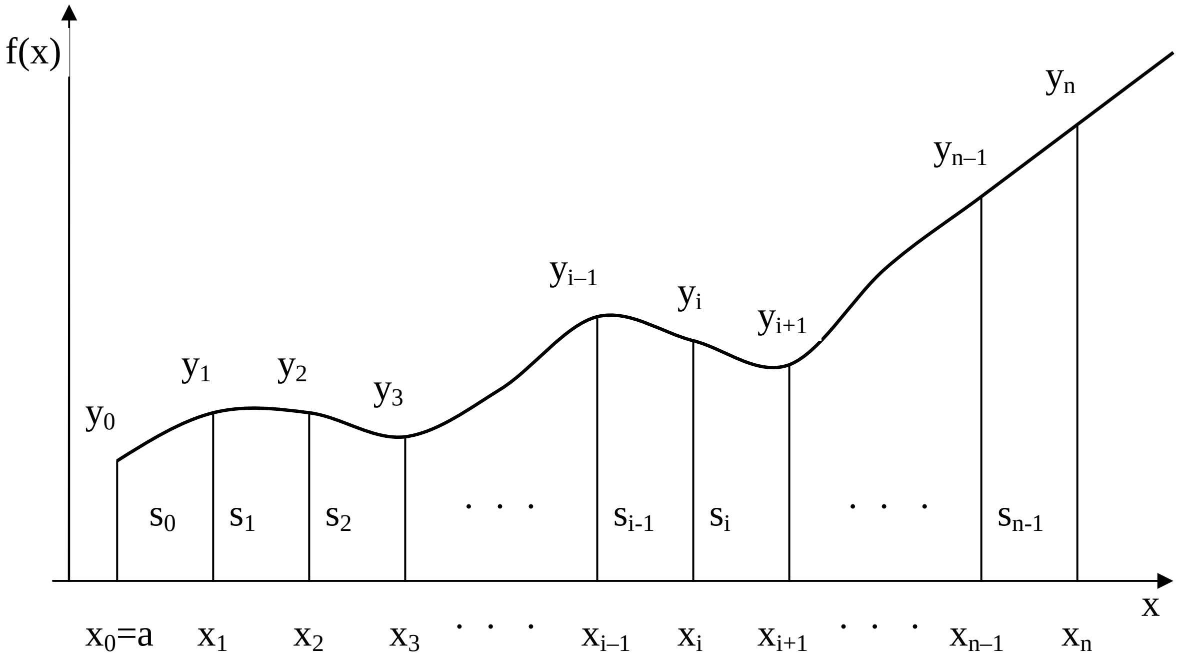

Рис.1. График функции f(x)

Площадь S можно вычислить как сумму элементарных площадей определенных для соответствующих элементарных отрезков длиной h:

$$S = s_0+s_1+s_2+\dots s_i+\dots\dots+s_{n-1}$$

Произвольную площадь s_i можно вычислить, как определенный интеграл на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ от более простой функции $\varphi_i(x)$, которой заменим реальную функцию f(x):

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx$$

Вид функции $\varphi_i(x)$ будет определять название метода.

Методы прямоугольников

Значение функции $\varphi_i(x)$ на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ принимается константой

Метод прямоугольников вперед. Для функции $\varphi_i(x) = y_i$ значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_i dx = y_i \cdot x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_i \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_i \cdot h \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i$$

Метод прямоугольников назад. Для функции $\varphi_i(x) = y_{i+1}$ значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1} dx = y_{i+1} \cdot x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1} \cdot h \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}$$

Метод прямоугольников в среднем. Определим точку: $x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}h$ и значение функции $y_{i+1/2}$ в середине элементарного отрезка $[x_i;x_{i+1}]$. Принимаем $\varphi_i(x) = y_{i+1/2}$. Тогда значения элементарной s_i и общей S площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y_{i+1/2} dx = y_{i+1/2} \cdot x\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = y_{i+1/2} \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_{i+1/2} \cdot h \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1/2}$$

Метод трапеций

Функцию $\varphi_i(x)$ будем определять как линейную на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$, т.е. ее график должен проходить через две смежные точки (x_i,y_i) и (x_{i+1},y_{i+1}). Функцию $\varphi_i(x)$ можно будет представить как интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по двум точкам (x_i,y_i) и (x_{i+1},y_{i+1}):

$$\varphi_i(x) = L_i(x) = y_i \cdot \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} + y_{i+1} \cdot \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}$$

тогда значения элементарной s_i площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_1}^{x_i+1} L_i(x) dx = \int_{x_i}^{x_i+1} y_i \frac{(x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i+1})} dx + \int_{x_i}^{x_i+1} y_{i+1} \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} dx.$$

Введем переменную $t = \frac{x - x_i}{h}$, тогда $x = x_i + h \cdot t$ и $dx = h \cdot dt$. Значениям x, равным x_i, x_{i+1} соответствуют значения t, равные 0, 1. Значение $(x\text{-}x_i) = x_i - x_i + h \cdot t = h \cdot t$. Значение $(x\text{-}x_{i+1}) = x_i - x_{i+1} + h \cdot t = h(t\text{-}1)$. Элементарную площадь s_i с использование новой переменной определим как:

$$s_i = \int_0^1 y_i \frac{h(t-1)}{(-h)} hdt + \int_0^1 y_{i+1} \frac{ht}{(h)} hdt = h\left(\int_0^1 y_i (1-t) dt + \int_0^1 y_{i+1} t dt\right) = h\left(y_i \left(t\Big|_0^1 - \frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right) + y_{i+1} \frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right) =$$

$$= h \cdot \left(y_i \left(1 - \frac{1}{2}\right) + y_{i+1} \frac{1}{2} \right) = h \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \cdot (y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n) =$$

$$= \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n) = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Метод Симпсона

Определим точку $x_{i+1/2} = x_i + \frac{1}{2}h$ в середине элементарного отрезка $[x_i;x_{i+1}]$ и значение функции в этой точке $y_{i+1/2}$. Функцию $\varphi_i(x)$ будем определять как квадратичную на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$, т.е. её график должен проходить через три смежные точки (x_i,y_i),$(x_{i+1/2},y_{i+1/2})$ и (x_{i+1},y_{i+1}). Функцию $\varphi_i(x)$ можно будет представить как интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный по трём точкам x_i, $x_{i+1/2}$ и x_{i+1}:

$$\varphi_i(x) = L_i(x) = y_i \frac{(x-x_{i+1/2})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1/2})(x_i-x_{i+1})} +$$

$$+ y_{i+1/2}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1/2}-x_i)(x_{i+1/2}-x_{i+1})} + y_{i+1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1/2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+1/2})},$$

Тогда значения элементарной s_i площади можно вычислить как:

$$s_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_i(x)dx =$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (y_i \frac{(x-x_{i+1/2})(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1/2})(x_i-x_{i+1})} + y_{i+1/2}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+1/2}-x_i)(x_{i+1/2}-x_{i+1})} + y_{i+1}\frac{(x-x_i)(x-x_{i+1/2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+1/2})})dx$$

Введем переменную $t = \frac{x-x_i}{h}$, тогда $x = x_i + h\cdot t$ и $dx = h\cdot dt$. Значениям x, равным x_i, $x_{i+1/2}$, x_{i+1} соответствуют значения t, равные 0, $\frac{1}{2}$, 1. Значение $(x-x_i) = x_i – x_i + h\cdot t = h\cdot t$. Значение $(x-x_{i+1/2}) = x_i - x_{i+1/2} + h\cdot t = h(t-\frac{1}{2})$. Значение $(x-x_{i+1}) = x_i - x_{i+1} + h\cdot t = h(t-1)$. Элементарную площадь s_i с использование новой переменной определим как:

$$s_i = \int_0^1 \left(y_i \frac{h(t-\frac{1}{2})h(t-1)}{(-\frac{h}{2})(-h)} + y_{i+1/2}\frac{hth(t-1)}{(\frac{h}{2})(-\frac{h}{2})} + y_{i+1}\frac{hth(t-\frac{1}{2})}{(h)(\frac{h}{2})} \right) hdt =$$

$$= \int_0^1 (y_i \frac{(t-\frac{1}{2})(t-1)}{(\frac{1}{2})}) + y_{i+1/2}\frac{t(t-1)}{(-\frac{1}{4})} + y_{i+1}\frac{t(t-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})})hdt =$$

$$= h\int_0^1 (y_i(2t^2-3t+1) - 4y_{i+1/2}(t^2-t) + y_{i+1}(2t^2-t))dt =$$

$$= h(y_i(2\frac{t^3}{3}\Big| - 3\frac{t^2}{2}\Big| + t\Big|) - 4y_{i+1/2}(\frac{t^3}{3}\Big| - \frac{t^2}{2}\Big|) + y_{i+1}(2\frac{t^3}{3}\Big| - \frac{t^2}{2}\Big|)) =$$

$$= h(y_i(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1) - y_{i+1/2}4(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) + y_{i+1}(\frac{2}{3} - \frac{1}{2})) = h(y_i\frac{1}{6} + y_{i+1/2}\frac{4}{6} + y_{i+1}\frac{1}{6})$$

$$= \frac{h}{6}(y_i + 4y_{i+1/2} + y_{i+1})$$

Тогда значения общей S площади можно вычислить как:

$$S=\sum_{i=0}^{n-1}s_i=\frac{h}{6}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(y_i+4y_{i+1/2}+y_{i+1})$$

$$S=\frac{h}{6}\cdot(y_0+4y_{1/2}+2y_1+4y_{3/2}+2y_2+...+2y_{n-1}+4y_{n-1/2}+y_n)$$

Пример. Вычислить значение определенного интеграла $I=\int_{0.6}^{1.1}(x+1)\cos(\frac{x^2}{2})\,dx$ всеми численными методами на заданном отрезке [0.6; 1.1] при числе разбиений n=5.

Шаг интегрирования: $h=\frac{1.6-0.1}{5}=0.1$

Строим таблицу значений подынтегральной функции в точках деления отрезка и в средних точках.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000	1.1000
y_i	1.5741	1.6492	1.7086	1.7463	1.7552	1.7273
$x_{i+1/2}$	0.6500	0.7500	0.8500	0.9500	1.0500	
$y_{i+1/2}$	1.6133	1.6812	1.7306	1.7548	1.7463	

Метод прямоугольников вперед. $s_i=y_i$; $I=\sum_{i=0}^{n-1}s_i=h\cdot\sum_{i=0}^{n-1}y_{i-1}$

$$I=0.1\cdot(1.5741+1.6492+1.7086+1.7463+1.7552)=0.8433$$

Метод прямоугольников назад. $s_i=h\cdot y_{i+1}$; $I=\sum_{i=0}^{n-1}s_i=h\cdot\sum_{i=0}^{n-1}y_{i+1}$

$$I=0.1\cdot(1.6492+1.7086+1.7463+1.7552+1.7273)=0.8587$$

Метод прямоугольники в среднем. $s_i=h\cdot y_{i+1/2}$; $I=\sum_{i=0}^{n-1}s_i=h\cdot\sum_{i=0}^{n-1}y_{i+1/2}$

$$I=0.1\cdot(1.6133+1.6812+1.7306+1.7548+1.7463)=0.8526$$

Метод трапеций. $s_i=h\cdot\frac{y_i+y_{i+1}}{2}$; $I=\sum_{i=0}^{n-1}s_i=h\cdot(\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}y_i)$

$$I=0.1\cdot(\frac{1.5741}{2}+1.6492+1.7086+1.7463+1.7552+\frac{1.7273}{2})=0.8510$$

Метод Симпсона. $I=\frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}(y_i+4\cdot y_{i+1/2}+y_{i+1})=\frac{h}{6}\left(y_0+4\sum_{i=0}^{n-1}y_{i+1/2}+2\sum_{i=1}^{n-1}y_i+y_n\right)$

$$I=\frac{0.1}{6}\bigl(1.5741+4\cdot(1.6133+1.6812+1.7306+1.7548+1.7463)+$$
$$+2\cdot(1.6492+1.7086+1.7463+1.7552)+1.7278\bigr)=0.8521$$