ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ

Для заданных на отрезке значениях независимой переменной x_i и соответствующих им значениях зависимой переменной y_i, (i=0,1,2,…,n), определить аналитическую зависимость $y = f(x)$.

Основные этапы при приближении функции.

- Выбор вида зависимости
- Выбор критерия
- Выбор узловых точек
- Оценка точности

Метод интерполяции многочленом Лагранжа

Пусть в n+1 узловой точке x_0, x_1, x_2, …, x_n определены значения y_0, y_1, y_2, …, y_n. Требуется построить многочлен L(x) степени не выше n, который принимает в узловых точках заданные значения, т.е. $L(x_0)=y_0$, $L(x_1)=y_1$, $L(x_2)=y_2$, …, $L(x_n)=y_n$. Рассмотрим многочлен вида:

$$l_i(x)=c_i(x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots\ldots\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n), \qquad (1)$$

где i = 0,1,2,3,…….,n, который только в точке x_i принимает значение y_i , а в остальных равен нулю.

$$l_i(x_j) = \begin{cases} y_i & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \qquad j = 0,1,2,...,n,$$

из этого условия можно определить c_i:

$$l_i(x_i)=c_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots\ldots\ldots(x_i-x_{n-1})(x_i-x_n) = y_i$$

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_{n-1})(x_i-x_n)}$$

и тогда многочлен (1) примет вид:

$$l_i(x) = y_i\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_{n-1})(x_i-x_n)} \qquad (2)$$

Многочлен, который в n+1 узловой точке будет принимать заданные значения, можно представить как сумму многочленов вида (2).

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)$$

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_{n-1})(x_i-x_n)}$$

Пример. Функция y=f(x) определена таблицей

i	0	1	2	3
x_i	0.500	1.100	1.700	2.300
y_i	–0.7780	0.2108	–0.0244	–0.1876

Определить интерполяционный многочлен L(x) по четырём узловым точкам.

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)} \cdot y_0 =$$

$$= \frac{(x-1.1)\cdot(x-1.7)\cdot(x-2.3)}{(0.5-1.1)\cdot(0.5-1.7)\cdot(0.5-2.3)} \cdot (-0.778) =$$

$$= 0.6003x^3 - 3.0616x^2 + 4.9886x - 2.5819$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)} \cdot y_1 =$$

$$= \frac{(x-0.5)\cdot(x-1.7)\cdot(x-2.3)}{(1.1-0.5)\cdot(1.1-1.7)\cdot(1.1-2.3)} \cdot 0.2108 =$$

$$= 0.4880x^3 - 2.1958x^2 + 2.8839x - 0.9540$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)} \cdot y_2 =$$

$$= \frac{(x-0.5)\cdot(x-1.1)\cdot(x-2.3)}{(1.7-0.5)\cdot(1.7-1.1)\cdot(1.7-2.3)} \cdot (-0.0244) =$$

$$= 0.0565x^3 - 0.2203x^2 + 0.2389x - 0.0714$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)} \cdot y_3 =$$

$$= \frac{(x-0.5)\cdot(x-1.1)\cdot(x-1.7)}{(2.3-0.5)\cdot(2.3-1.1)\cdot(2.3-1.7)} \cdot (-0.1876) =$$

$$=-0.1448x^3+0.4777x^2-0.4733x+0.1354$$

$$L(x)=\sum_{i=0}^{3} l_i(x)=1.0000x^3-5.0000x^2+7.6381x-3.4719$$

Аппроксимация.
Метод наименьших квадратов

Пусть данные некоторого эксперимента представлены в виде таблицы значений независимой переменной x и зависимой переменной y:

i	x_i	y_i
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
⋮	⋮	⋮
n	x_n	y_n

Требуется отыскать аналитическую зависимость $f(x,a_0,a_1,\ldots,a_m)$, являющуюся функцией одной независимой переменной x и параметров $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_m$, которая наилучшим образом описывала бы эти экспериментальные данные в смысле минимума квадратичного критерия рассогласования $R(a_0,a_1,\ldots,a_m)$:

$$R=\sum_{i=0}^{n}\left[y_i-f(x_i,a_0,a_1,\cdots,a_m)\right]^2$$

Функцию $f(x,a_0,a_1,\ldots,a_m)$) определим как полином степени m вида:

$$f(x,\vec{a})=\sum_{j=0}^{m} a_j\cdot x^j=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$$

Надо найти такие значения параметров, при которых квадратичный критерий рассогласования имел бы минимальное значение

$$R=\sum_{i=0}^{n}\left[y_i-(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2\cdots+a_mx_i^m)\right]^2\to\min$$

Вывод формулы для определения параметров в матричном виде рассмотрим на примере полинома второй степени (m=2).

$$f(x,\bar{a})=a_0+a_1x+a_2x^2$$

Для заданных значений $x_0,x_1,\dots,x_n$ критерий R будет являться функцией трёх переменных a_0,a_1,a_2 :

$$R = R(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{n}\left[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)\right]^2$$

Необходимые условия минимума критерия R имеют вид:

$$\frac{\partial R}{\partial a_0} = 2\cdot\sum_{i=0}^{n}\left[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)\right]\cdot(-1) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = 2\cdot\sum_{i=0}^{n}\left[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)\right]\cdot(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_2} = 2\cdot\sum_{i=0}^{n}\left[y_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)\right]\cdot(-x_i^2) = 0$$

или

$$\left(\sum_{i=0}^{n}1\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}x_i^2\right)a_2 = \sum_{i=0}^{n}y_i$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}x_i^2\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}x_i^3\right)a_2 = \sum_{i=0}^{n}y_ix_i$$

$$\left(\sum_{i=0}^{n}x_i^2\right)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n}x_i^3\right)a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n}x_i^4\right)a_2 = \sum_{i=0}^{n}y_ix_i^2$$

Полученную линейную относительно искомых параметров a_0,a_1,a_2, систему уравнений запишем в матричном виде: $\overset{=}{N}\,\vec{a} = \vec{b}$

$$\overset{=}{N} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n}1 & \sum_{i=0}^{n}x_i & \sum_{i=0}^{n}x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n}x_i & \sum_{i=0}^{n}x_i^2 & \sum_{i=0}^{n}x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n}x_i^2 & \sum_{i=0}^{n}x_i^3 & \sum_{i=0}^{n}x_i^4 \end{bmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n}y_i \\ \sum_{i=0}^{n}y_ix_i \\ \sum_{i=0}^{n}y_ix_i^2 \end{bmatrix}$$

Для удобства формирования матрицы коэффициентов $\overset{=}{N}$ и столбца свободных членов $\vec{b}$ введем матрицу $\overset{=}{\Phi}$ элементы которой определяются через значения независимой переменной x_i, i=0,1,2,…,n

$$\overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix}$$

тогда

$$\overline{\overline{N}} = \overline{\overline{\Phi}}^T \cdot \overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdot & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdot & x_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \overline{\overline{\Phi}}^T \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdot & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdot & x_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

При аппроксимации полиномами высших порядков матрица $\overline{\overline{\Phi}}$ будет иметь вид

$$\overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots & x_1^m \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \cdots & x_n^m \end{bmatrix} \text{где элемент } \phi_{ij} = x_i^j, \quad i = 0,1,2,...,n, \quad j = 0,1,2,...,m$$

В общем случае количество строк в матрицы $\overline{\overline{\Phi}}$ равно количеству точек, а количество столбцов равно количеству параметров, где строка состоит из значений частных производных от функции $f(x,\vec{a})$ по соответствующему параметру.

$$\overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_{0,}\ \bar{a})}{\partial a_0} & \dfrac{\partial f(x_{0,}\ \bar{a})}{\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial f(x_{0,}\ \bar{a})}{\partial a_m} \\ \dfrac{\partial f(x_{1,}\ \bar{a})}{\partial a_0} & \dfrac{\partial f(x_{1,}\ \bar{a})}{\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial f(x_{1,}\ \bar{a})}{\partial a_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f(x_{n,}\ \bar{a})}{\partial a_0} & \dfrac{\partial f(x_{n,}\ \bar{a})}{\partial a_1} & \cdots & \dfrac{\partial f(x_{n,}\ \bar{a})}{\partial a_m} \end{bmatrix}$$

Так для функции $f(x,\bar{a}) = a_0 \cdot \dfrac{1}{x} + a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot \ln(x)$

$$\overline{\overline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_0} & x_0^2 & \ln(x_0) \\ \dfrac{1}{x_1} & x_1^2 & \ln(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{1}{x_n} & x_n^2 & \ln(x_n) \end{bmatrix}$$

Пример. Определить параметры зависимости вида: $f(x,\bar{a}) = a_0 + a_1 x$ используя метод наименьших квадратов, по следующим экспериментальным данным:

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	2	1	2	4

$$\bar{\bar{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{\bar{\Phi}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{\bar{N}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 4a_0 & 2a_1 & = & 9 \\ 2a_0 & 6a_1 & = & 8 \end{cases} \qquad \bar{a} = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$f(x,\bar{a}) = 1.9 + 0.7x$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \bar{\bar{\Phi}} \cdot \vec{a} \qquad R = (\vec{f}(x) - \vec{y})^T \cdot (\vec{f}(x) - \vec{y}) \qquad R = 2.3$$

Пример. Определить параметры зависимости вида: $f(x,\bar{a}) = a_0 + a_1 \cdot x^2$

$$\bar{\bar{\Phi}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \bar{\bar{\Phi}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \bar{\bar{N}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} 4a_0 & 6a_1 & = & 9 \\ 6a_0 & 18a_1 & = & 20 \end{cases} \qquad \bar{a} = \begin{bmatrix} 1.67 \\ 0.72 \end{bmatrix}$$

$$f(x,\bar{a}) = 1.67 + 0.72 \cdot x^2 \qquad R = 0.06$$