Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В общем виде СЛАУ можно записать в следующем виде

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{1m}x_m = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{2m}x_m = & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{nm}x_m = & b_n \end{array}$$

Совокупность коэффициентов системы можно представить в виде матрицы:

$$\overset{=}{A} = [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3,\ldots,n; \quad j=1,2,3,\ldots,m$$

Совокупность неизвестных системы – в виде вектора столбца:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad j=1,2,3,\ldots,m$$

Совокупность свободных членов – в виде и вектора столбца:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad i=1,2,3,\ldots,n$$

Используя выше приведенные определения, запишем СЛАУ в матричном виде:

$$\overset{=}{A}\vec{x} = \vec{b}$$

Решить СЛАУ значить найти такие значения вектора

$$\vec{x}^* = \begin{bmatrix} x^*_1 \\ x^*_2 \\ \ldots \\ x^*_m \end{bmatrix},$$

подстановка которого в систему, обращает каждое уравнение этой системы в тождество.

Классификация СЛАУ

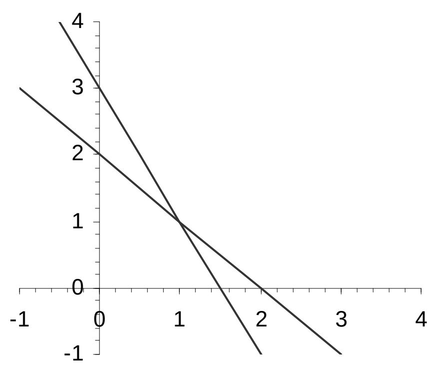
1. Если число уравнений больше чем число неизвестных, т.е. $n>m$, то СЛАУ называется переобусловленой
2. Если число уравнений меньше чем число неизвестных, т.е. $n<m$, то СЛАУ называется недообусловленой
3. Если число уравнений равно числу неизвестных, т.е. $n=m$, то СЛАУ называется нормальной

4. Если вектор свободных членов равен нулю $\vec{b} = \vec{0}$, то СЛАУ называется однородной
5. Если вектор свободных членов не равен нулю $\vec{b} \neq \vec{0}$, то СЛАУ называется неоднородной
6. Если система, имеет хотя бы одно решение, она называется совместной. Система, не имеющая решений, называется несовместной.
7. Совместная система, имеющая единственное решение, называется определенной, а имеющая бесчисленное множество решений, называется неопределенной.

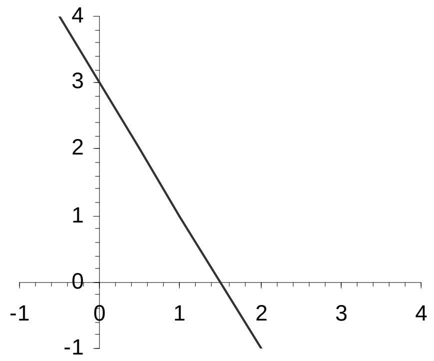
Очевидно, что однородная система всегда совместна, так как имеет хотя бы одно решение $\vec{x} = \vec{0}$, которое называется тривиальным.

примеры графической интерпретации:

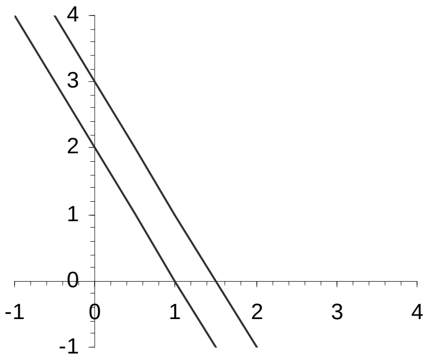
$2x_1 + x_2 = 3 \quad x_2 = 3 - 2x_1$ система совместная и определенная.
$2x_1 + 2x_2 = 4 \quad x_2 = 2 - x_1$



$2x_1 + x_2 = 3 \quad x_2 = 3 - 2x_1$ система совместная и неопределенная.
$4x_1 + 2x_2 = 6 \quad x_2 = 3 - 2x_1$



$2x_1 + x_2 = 3 \quad x_2 = 3 - 2x_1$ система несовместная.
$4x_1 + 2x_2 = 4 \quad x_2 = 2 - 2x_1$



Методы решения СЛАУ

Все методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) можно разделить на две группы: точные и итерационные.

Точные методы позволяют получить решение путем выполнения определённого и точного количества арифметических операций. При этом погрешность решения определяется лишь точностью представления исходных данных и точностью вычислительных операций.

Итерационные методы дают некоторую последовательность приближений к решению. Пределом этой последовательности является решение системы уравнений. Решение, возможно, определить лишь с некоторой, как правило, заданной степенью точности ε. Количество итераций для достижения требуемой точности решения определяется величиной ε, выбором начального приближения и видом системы уравнений.

Точные методы

Метод обратной матрицы

$$\overline{\overline{A}}\cdot\vec{x}=\vec{b} \qquad \overline{\overline{A}}^{-1}\cdot\overline{\overline{A}}\cdot\vec{x}=\overline{\overline{A}}^{-1}\cdot\vec{b} \qquad \overline{\overline{E}}\cdot\vec{x}=\overline{\overline{A}}^{-1}\cdot\vec{b} \qquad \vec{x}^{*}=\overline{\overline{A}}^{-1}\cdot\vec{b}$$

$$\left[\overline{\overline{A}}\,\middle|\,\vec{b}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2.00 & 1.00 & 1.00 & 4.00 \\ 1.00 & -1.50 & -0.50 & -1.00 \\ 2.00 & 2.00 & 4.00 & 8.00 \end{array}\right] \qquad \overline{\overline{A}}^{-1}=\begin{bmatrix} 0.50 & 0.20 & -0.10 \\ 0.50 & -0.60 & -0.20 \\ -0.50 & 0.20 & 0.40 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{*}=\begin{bmatrix} 0.50 & 0.20 & -0.10 \\ 0.50 & -0.60 & -0.20 \\ -0.50 & 0.20 & 0.40 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4.00 \\ -1.00 \\ 8.00 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

4.1. Метод Гаусса

Требуется решить систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\overset{=}{A}\,\vec{x} = \vec{b}$$

Метод Гаусса включает два этапа.

Первый этап (прямой ход) заключается в последовательном исключении неизвестных из системы уравнений и состоит из n–1 шага. На первом шаге с помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений начиная со второго, на втором шаге с помощью второго уравнения исключается x_2 из последующих уравнений начиная с третьего и т.д. Последним исключается x_{n-1} из последнего n-го уравнения так, что последнее уравнение будет содержать только одно неизвестное x_n. Такое последовательное исключение неизвестных равносильно приведению матрицы коэффициентов к треугольному виду. Строка, с помощью которой исключаются неизвестные, называется ведущей строкой, а диагональный элемент в этой строке – ведущим элементом.

$$\begin{bmatrix}
a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & a_{13}\cdot x_3 & + & \dots & + & a_{1n}\cdot x_n & = b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + & a_{23}\cdot x_3 & + & \dots & + & a_{2n}\cdot x_n & = b_2 \\
a_{31}\cdot x_1 & + & a_{32}\cdot x_2 & + & a_{33}\cdot x_3 & + & \dots & + & a_{3n}\cdot x_n & = b_3 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\
a_{n1}\cdot x_1 & + & a_{n2}\cdot x_2 & + & a_{n3}\cdot x_3 & + & \dots & + & a_{nn}\cdot x_n & = b_n
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + & a_{13}\cdot x_3 & + & \dots & + & a_{1n}\cdot x_n & = b_1 \\
0 & + & a_{22}{}^{(1)}\cdot x_2 & + & a_{23}{}^{(1)}\cdot x_3 & + & \dots & + & a_{2n}{}^{(1)}\cdot x_n & = b_2{}^{(1)} \\
0 & + & 0 & + & a_{33}\cdot x_3{}^{(2)} & + & \dots & + & a_{3n}{}^{(2)}\cdot x_n & = b_3{}^{(2)} \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & a_{nn}{}^{(n-1)}\cdot x_n & = b_n{}^{(n-1)}
\end{bmatrix}$$

Второй этап (обратный ход) заключается в последовательном вычислении искомых неизвестных и состоит из n шагов. Решая последнее уравнение, находим неизвестное x_n. Далее используя это значение из предыдущего уравнения вычисляем неизвестное x_{n-1} и т.д. Последним найдем неизвестное x_1 из первого уравнения.

Матрица, содержащая помимо коэффициентов при неизвестных $\overset{=}{A}$ столбец свободных членов $\vec{b}$, называется расширенной

$$\overset{=}{C} = \left[\,\overset{=}{A}\,\middle|\,\vec{b}\,\right].$$

Алгоритм.

1. Строим расширенную матрицу $\overset{=}{C}$ размерностью n на n+1, приписав, справа к матрицы $\overset{=}{A}$ вектор $\vec{b}$. $\overset{=}{C} = \left[\overset{=}{A} \middle| \vec{b}\right]$ т.е. $c_{i,j}=a_{i,j}$, $c_{i,n+1}=b_i$, где i=1,2,3,…,n

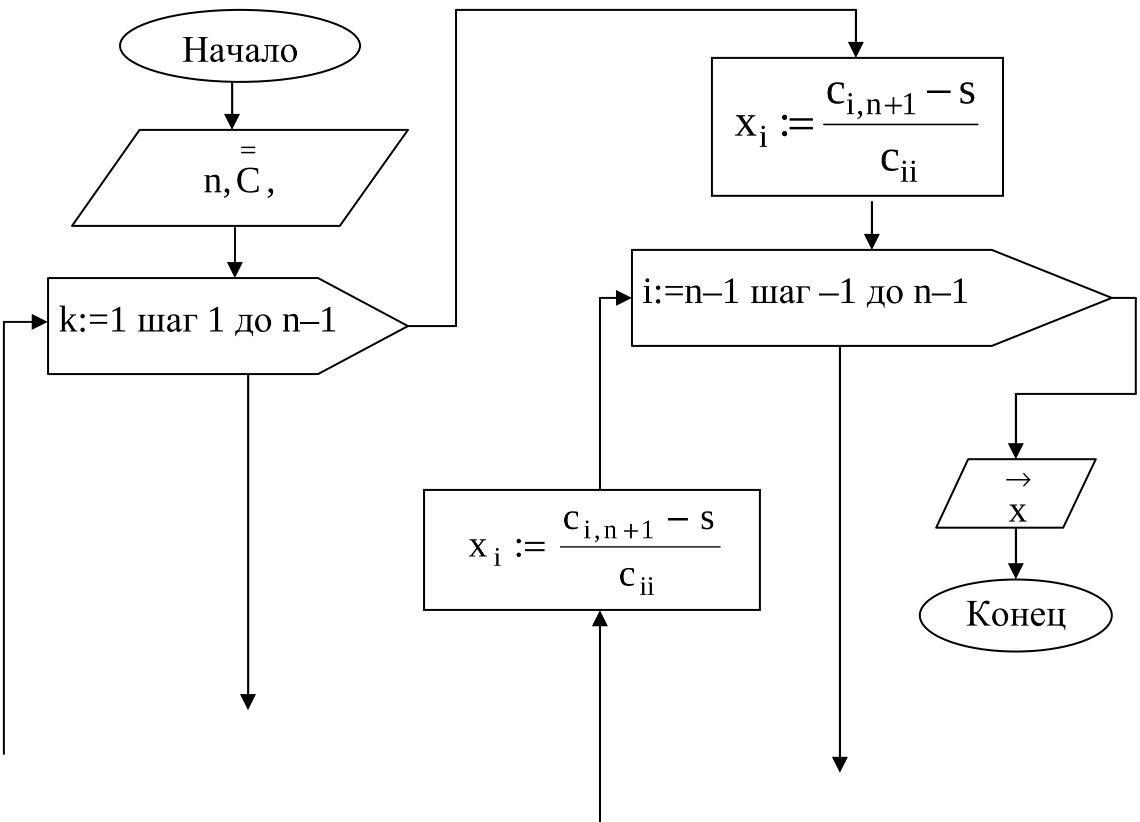
   j=1,2,3,…,n

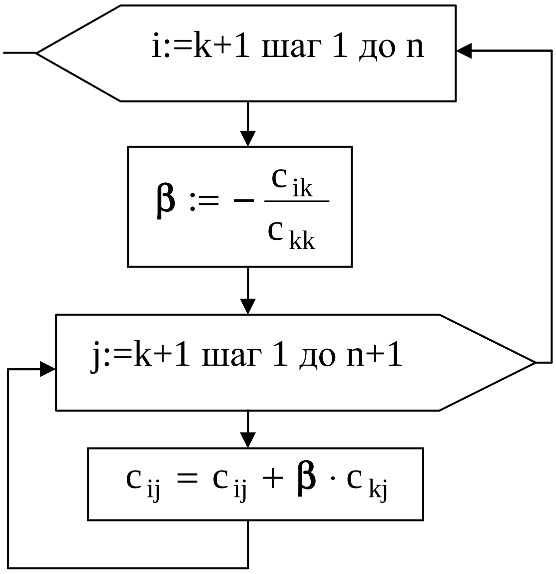
$$\overset{=}{C} = \left[\overset{=}{A} \middle| \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} & c_{2,n+1} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} & c_{3,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} & c_{n,n+1} \end{array}\right]$$. Задаем номер ведущей строки k = 1

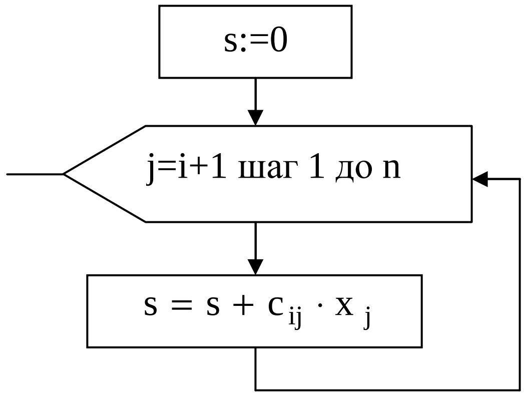
2. Преобразуем все строки, расположенные ниже **k**-ой так, чтобы элементы $\mathbf{c_{ik}=0}$, для этого вычисляем множитель $\boldsymbol{\beta=-c_{i,k}/c_{k,k}}$ и каждую **i**-ую строку заменяем суммой **i**–ой и **k**-ой умноженной на **β**, т.е. $\mathbf{c_{i,j}=c_{i,j}+\beta * c_{k,j}}$ где i = k+1,k+2,k+3,….,n и j = k,k+1,k+2,…,n+1
3. Проверяем k = n-1 если нет, то выбираем новую ведущую строку k=k+1 и переходим на пункт 2, иначе выполняем пункт 4.
4. Обратный ход. Из последнего **n**-ого уравнения определяем последнее **n**-ое неизвестное. $\mathbf{x_n=c_{n,n+1}/c_{n,n}}$

Последовательно, из предыдущих уравнений начиная с **i=n-1**, вычисляем соответствующие неизвестные x_i. Последним, определяется первое неизвестное из первого уравнение. $x_i = \dfrac{(c_{i,n-1} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{i,j} * x_j)}{c_{i,i}}$ i = n-1, n-2, n-3,…,1

Блок-схема метода Гаусса







Пример. Решить СЛАУ методом Гаусса.

$$\begin{bmatrix} -7.000 & -2.000 & 2.000 \\ 1.000 & -7.000 & -3.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.000 \\ -7.000 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Первый этап. Строим расширенную матрицу и преобразуем её к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 1.000 & -7.000 & -3.000 & -7.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 & -5.000 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 0.000 & -7.286 & -2.714 & -8.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 & -5.000 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 0.000 & -7.286 & -2.714 & -8.000 \\ 0.000 & -0.143 & -5.857 & -2.000 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 0.000 & -7.286 & -2.714 & -8.000 \\ 0.000 & 0.000 & -5.804 & -1.843 \end{array}\right]$$

Второй этап. Вычисляем неизвестные.

$$x_3 = \frac{-1.843}{-5.804} = 0.318$$

$$x_2 = \frac{(-8-(-2.714\cdot 0.318))}{-7.286} = 0.980$$

$$x_1 = \frac{(-7-(-2\cdot 0.980 + 2\cdot 0.318))}{-7} = 0.811$$

$$\text{ответ} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 0.811 \\ 0.980 \\ 0.318 \end{bmatrix}$$

Модификации метода Гаусса

Для уменьшения погрешности вычислений при реализации алгоритма метода Гаусса используют его модификации, такие как метод Гаусса с частичным или полным выбором «ведущего» элемента. В модификации с **частичным** выбором на k-м шаге прямого хода в качестве «ведущего» выбирается наибольший по модулю элемент из неприведённой части k-го столбца матрицы, т.е.

$$c_{kk} = \max_i |c_{ik}|, \ \ i = k, k+1, k+2, ..., n$$

Строка, содержащая этот элемент, переставляется с k-й строкой расширенной матрицы.

При **полном** выборе в качестве «ведущего» элемента выбирается максимальный по модулю элемент из всей неприведённой части матрицы коэффициентов системы:

$$c_{kk} = \max_{i,j} |c_{ij}|, \ \ i, j = k, k+1, k+2, ..., n$$

Для этого осуществляется необходимая перестановка как строк, так и столбцов в расширенной матрице коэффициентов. При этом следует помнить, что перестановка столбцов равносильна переименованию неизвестных.

Пример. **Решить СЛАУ методом Гаусса с частичным выбором.**

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 6.000 & -1.000 \\ 2.000 & 1.000 & 5.000 \\ 5.000 & -1.000 & 2.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 10.000 \\ -10.000 \end{bmatrix}$$

Первый этап. Строим расширенную матрицу и преобразуем её к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 5 & -1 & 2 & -10 \end{array}\right]$$

На первом шаге преобразования к=1 наибольший по абсолютной величине элемент в первом столбце (5) расположен в третьей строке матрицы, поэтому меняем первую и третью строки и производим необходимые преобразования.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 1.4 & 4.2 & 14 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \end{array}\right]$$

На втором шаге преобразования к=2 наибольший по абсолютной величине элемент во втором столбце (6.2) расположен в третьей строке матрицы, поэтому меняем вторую и третью строки и производим необходимые преобразования.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \\ 0 & 1.4 & 4.2 & 14 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \\ 0 & 0 & 4.516 & 13.548 \end{array}\right]$$

Второй этап. Вычисляем неизвестные.

$$x_3 = \frac{13.548}{4.516} = 3$$

$$x_2 = \frac{(2 + 1.4 \cdot 3)}{6.2} = \frac{6.2}{6.2} = 1$$

$$x_1 = \frac{-10 - ((-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3)}{5} = -3$$

$$\text{ответ} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений.

Если система плохо обусловлена, то это значит, что погрешности коэффициентов матрицы и свободных членов или погрешность округления при расчетах могут сильно исказить решение.

Исходную систему уравнений

$$\overline{\overline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

с учетом погрешности в векторе $\vec{b}$ можно записать в виде:

$$\overline{\overline{A}} \cdot \vec{x}^* = \vec{b} + \Delta \vec{b}, \text{ где } \vec{x}^* = \vec{x} + \Delta \vec{x}.$$

Получаемое решение, отличающееся от точного $\vec{x}$ на величину ошибки $\Delta \vec{x}$. Заменив, $\vec{x}^*$ получим

$\overline{\overline{A}} \cdot (\vec{x} + \Delta \vec{x}) = \vec{b} + \Delta \vec{b}$ или $\overline{\overline{A}} \cdot \vec{x} - \vec{b} + \overline{\overline{A}} \cdot \Delta \vec{x} = \Delta \vec{b}$ и тогда

$\overline{\overline{A}} \cdot \Delta \vec{x} = \Delta \vec{b}$ отсюда можно выразить абсолютную погрешность решения

$$\Delta \vec{x} = \overline{\overline{A}}^{-1} \cdot \Delta \vec{b}$$

норма этой погрешности определяется соотношением:

$$\| \Delta \vec{x} \| = \| \overline{\overline{A}}^{-1} \cdot \Delta \vec{b} \| \text{ или } \| \Delta \vec{x} \| \le \| \overline{\overline{A}}^{-1} \| \cdot \| \Delta \vec{b} \|$$

Определим относительную погрешность

$$\frac{\| \Delta \vec{x} \|}{\| \vec{x} \|} \le \frac{\| \overline{\overline{A}}^{-1} \| \cdot \| \Delta \vec{b} \|}{\| \vec{x} \|}$$

из исходной системы $\overline{\overline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ получим $\| \overline{\overline{A}} \| \cdot \| \vec{x} \| \ge \| \vec{b} \|$

далее определим $\frac{1}{\|\vec{x}\|} \le \frac{\|\bar{\bar{A}}\|}{\|\vec{b}\|}$ и подставим в определение относительной погрешности получим:

$$\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \|\bar{\bar{A}}^{-1}\| \cdot \|\bar{\bar{A}}\| \cdot \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

Вводим понятие числа обусловленности:

$$K_{об.}=\mathrm{Cond}(\bar{\bar{A}})=\|\bar{\bar{A}}^{-1}\| \cdot \|\bar{\bar{A}}\| \text{ и тогда } \frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le K_{об} \cdot \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}.$$

Следует иметь ввиду, что мы определяем предельную относительную погрешность, реальная может быть и меньше.

Пример.

Определить обусловленность систем уравнений:

$$1)\ \begin{matrix} -x_1+2x_2=1 \\ 2x_1-\ x_2=1 \end{matrix} \qquad 2)\ \begin{matrix} -x_1+\ \ 2x_2=1 \\ -10x_1+21x_2=11 \end{matrix},$$

$$\text{при } \Delta\vec{b}=\begin{bmatrix}0.1\\0.0\end{bmatrix}, \quad \|\Delta\vec{b}\|=0.1$$

Без учета погрешности точное решение одно и тоже для обеих систем:

$$\vec{x}=\begin{bmatrix}1.00\\1.00\end{bmatrix}$$

$$\text{для 1-ой системы } \bar{\bar{A}}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}, \vec{b}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \bar{\bar{A}}^{-1}=\begin{bmatrix}0.33 & 0.67\\ 0.67 & 0.33\end{bmatrix}$$

$$\|\bar{\bar{A}}\|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2+(-1)^2}=3.16, \qquad \|A^{-1}\|=1.05 \qquad \mathrm{cond}=3.33$$

$$\|\vec{b}\|=\sqrt{1^2+1^2}=1.41$$

$$\|\delta \vec{b}\| = \frac{0.1}{1.41} = 0.071$$

$$\|\delta \vec{x}\| = 3.33 * 0.071 = 0.24$$

для 2-ой системы $\overset{=}{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -10 & 21 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix}, \overset{=}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -21 & 2 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$

$$\|\overset{=}{A}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-10)^2 + 21^2} = 23.37, \quad \|\overset{=}{A}^{-1}\| = 23.37 \quad \text{cond}=546.0$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + 11^2} = 11.05$$

$$\|\delta \vec{b}\| = \frac{0.1}{11.05} = 0.0091$$

$$\|\delta \vec{x}\| = 546 \cdot 0.0091 = 4.94$$

Метод простых итераций

Алгоритм метода состоит из трёх этапов.

Первый этап. Приведение СЛАУ к итерационному виду, для этого разрешим каждое уравнение относительно соответствующего неизвестного:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \ldots\ldots & + a_{nn}x_n = & b_n \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} x_1 = & d_1 - & (\ 0\, x_1 & + c_{12}x_2 & + c_{13}x_3 & + \ldots & + c_{1n}x_n\ ) \\ x_2 = & d_2 - & (c_{21}x_1 & + 0\, x_2 & + c_{23}x_3 & + \ldots & + c_{2n}x_n\ ) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n = & d_n - & (c_{n1}x_1 & + c_{n2}x_2 & + c_{n3}x_3 & + \ldots & + 0\, x_n\ ), \end{array}$$

где $d_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$; $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j \\ \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{при } i \neq j \end{cases}$ $\quad i = 1,2,3,\cdots,n;\ j = 1,2,3,\cdots,n$

Тогда итерационную формулу запишем в виде:

$$\vec{x}^{\,k} = \vec{d} - \bar{\bar{C}} \cdot \vec{x}^{\,k-1}; \quad k = 1, 2, 3, \cdots,$$

где вектор $\vec{d}$ – приведенный столбец свободных членов, матрица $\bar{\bar{C}}$ – приведенная матрица коэффициентов.

Второй этап. Проверяем условие сходимости

$$\| \bar{\bar{C}} \| \le 1,$$

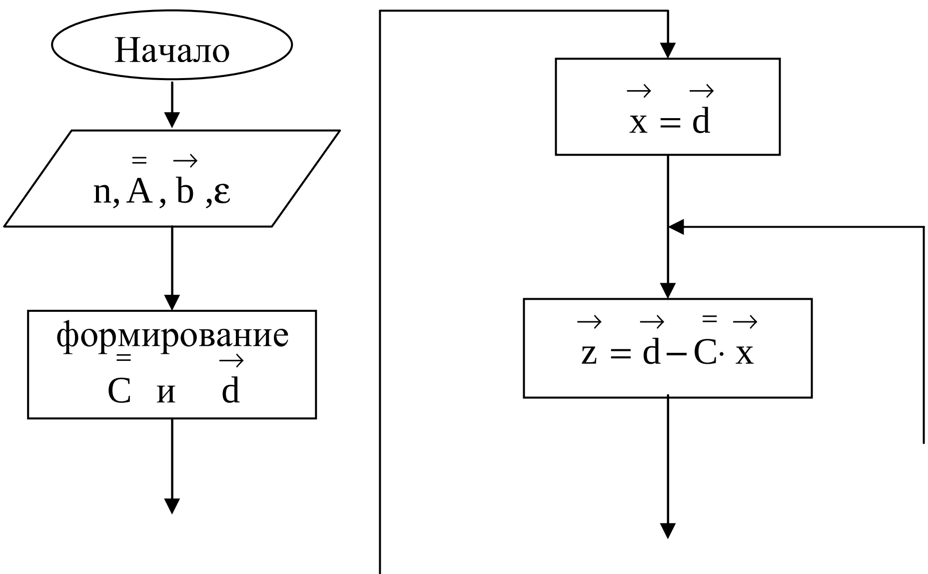
если условие не выполняется, то преобразуем исходную систему и выполняем 1-й этап.

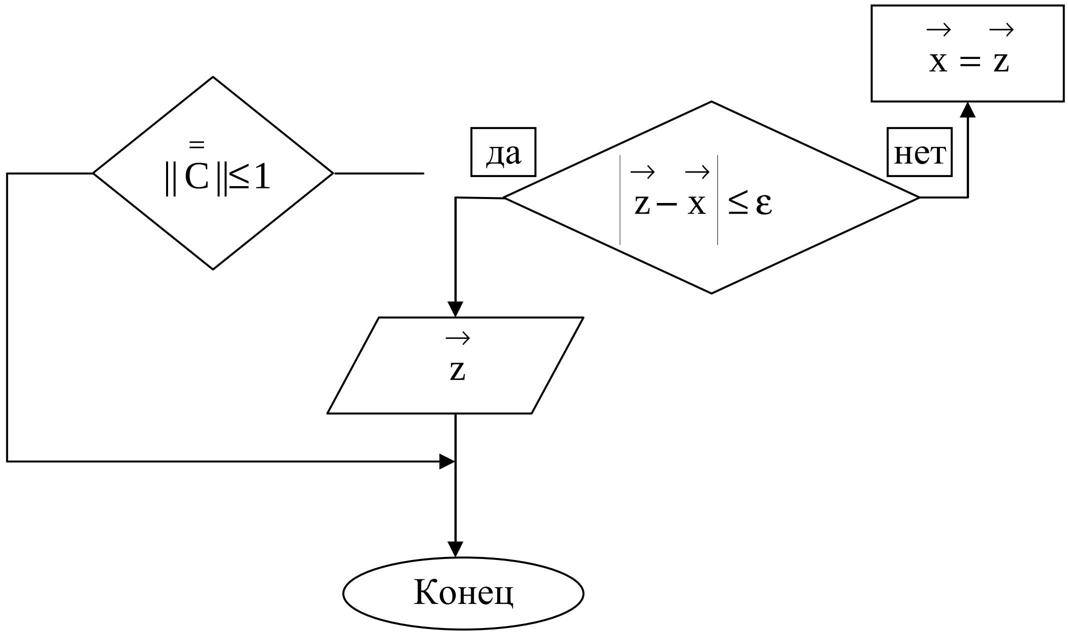
Третий этап. Осуществляем уточнение решения по полученной итерационной формуле. За начальное приближение принимается вектор $\vec{x}^{\,0} = \vec{d}$. Условием окончания итерационного процесса является выполнение условия

$$\| \vec{x}^{\,k} - \vec{x}^{\,k-1} \| \le \boldsymbol{\varepsilon},$$

где величина ε определяет точность получаемого решения, а $\vec{x}^{\,k}$ и $\vec{x}^{\,k-1}$ – смежные приближения к решению.

Блок-схема метода простых итераций





Пример. Решить СЛАУ методом простых итераций $\varepsilon=0.01$.

$$\begin{bmatrix} -7.000 & -2.000 & 2.000 \\ 1.000 & -7.000 & -3.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7.000 \\ -7.000 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Преобразуем исходную систему к итерационному виду.

$$\vec{x}^{\,k}=\vec{d}-\bar{\bar{C}}\cdot\vec{x}^{\,k-1}, \quad k=1,2,3,\cdots$$

$$\bar{\bar{C}}=\begin{bmatrix} 0.000 & 0.286 & -0.286 \\ -0.143 & 0.000 & 0.429 \\ 0.600 & 0.200 & 0.000 \end{bmatrix} \qquad \left\|\bar{\bar{C}}\right\|=0.876<1$$

$$\vec{d}=\begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}^{\,0}=\vec{d}$$

Результаты уточнения решения СЛАУ методом простых итераций

k	$\vec{d}$		$\bar{\bar{C}}$		$\vec{x}^{\,k-1}$	$\vec{x}^{\,k}$		$\Delta\vec{x}$	$\left\|\Delta\vec{x}\right\|$
1	1.000 1.000 1.000	–	0.000 0.286 –0.286 –0.143 0.000 0.429 0.600 0.200 0.000	·	1.000 1.000 = 1.000	1.000 0.714 0.200		0.000 –0.286 –0.800	0.849
2	1.000 1.000 1.000	–	0.000 0.286 –0.286 –0.143 0.000 0.429 0.600 0.200 0.000	·	1.000 0.714 = 0.200	0.853 1.057 0.257		–0.147 0.343 0.057	0.377

3	1.000 1.000 1.000	–	0.000 0.286 –0.286 –0.143 0.000 0.429 0.600 0.200 0.000	·	0.853 1.057 0.257	=	0.771 1.012 0.277	–0.082 –0.045 0.020	0.095
4	1.000 1.000 1.000	–	0.000 0.286 –0.286 –0.143 0.000 0.429 0.600 0.200 0.000	·	0.771 1.012 0.277	=	0.790 0.992 0.335	0.019 –0.020 0.058	0.064
5	1.000 1.000 1.000	–	0.000 0.286 –0.286 –0.143 0.000 0.429 0.600 0.200 0.000	·	0.790 0.992 0.335	=	0.812 0.969 0.328	0.022 –0.022 –0.007	0.032
6	1.000 1.000 1.000	–	0.000 0.286 –0.286 –0.143 0.000 0.429 0.600 0.200 0.000	·	0.812 0.969 0.328	=	0,817 0,976 0,319	0,004 0,006 -0,009	0,012
7	1.000 1.000 1.000	–	0.000 0.286 –0.286 –0.143 0.000 0.429 0.600 0.200 0.000	·	0,817 0,976 0,319	=	0,810 0,981 0,317	-0,002 0,001 0,002	0,003

$$\text{ответ}\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 0.810 \\ 0.981 \\ 0.317 \end{bmatrix}$$