Обработка результатов измерения одной величины.

Измерения, проводимые в опытах эксперимента, сопровождаются ошибками, ввиду конечной точности приборов и не идеальности условий эксперимента. Ошибки делятся на три типа.

- Систематические
- Грубые
- Случайные

Ввиду наличия ошибок, точное значение измеряемой величины a^* установить не удается. Поэтому при n повторных измерений одной и той же величины a^* получают серию различных результатов $\mathbf{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n}$ и наиболее вероятной оценкой измеряемой величины a^* будет являться среднее значение результатов серии.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Замена точного значения измеряемой величины a^* значением $\bar{x}$ влечёт ошибку, значение которой точно указать нельзя, а можно определить приближенно с необходимой **доверительной вероятностью** β. Нам надо определить величину $\boldsymbol{\varepsilon_\beta}$ в неравенстве $\left|a^* - \bar{x}\right| \le \varepsilon_\beta$. Очевидно, ε_β будет тем больше, чем с больше вероятностью β мы будем её определять, чем грубее был проведен эксперимент и чем меньше n (количество опытов в серии измерений).

Для оценки качества измерений, вводят понятие **дисперсии**, которая вычисляется по формуле:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{f}$$,где f – число степеней свободы, f = n–1

Среднеквадратичным отклонением или **стандартом** называют величину:

$$S_x = \sqrt{S_x^2}$$

Для определения, является ли измеренное значение грубой ошибкой, можно воспользоваться U критерием:

$$U^{ðàñ÷} = \frac{\left|x^{ïîä} - \bar{x}\right|}{\sqrt{S_x^2 \cdot \frac{n-1}{n}}}$$

Если $U^{расч} > U_{p,f}$, то подозреваемое значение с вероятностью β является грубой ошибкой. Грубая ошибка исключается из серии. Критерий $U_{p,f}$ определяется из табл. 1 при уровне значимости $p = 1 - \beta$ и числе степеней свободы $f = n - 2$.

Таблица 1

f\p	**0.05**	**0.01**
1	1.412	1.414
2	1.689	1.723
3	1.869	1.955
4	1.996	2.130
5	2.093	2.265
6	2.172	2.374

В статистике доверительную ошибку вычисляют по формуле:

$$\varepsilon_\beta = t_{p,f} \cdot \sqrt{\frac{S_x^2}{n}},$$

где $t_{p,f}$ – критерий Стьюдента, который определяется из табл. 2 при $p = 1 - \beta$ и $f = n - 1$.

f/p	**0.10**	**0.05**	**0.01**
2	2.92	4.30	9.92
3	2.35	3.18	5.84
4	2.13	2.78	4.60
5	2.01	2.57	4.03
6	1.94	2.45	3.78

Интервал, который с доверительной вероятностью β накрывает точное значение α^* определяется, значением ε_β и называется доверительным и определяется как:

Пример: $p = 0.05$ $\beta = 0.95$ $n = 6$

i	1	2	3	4	5	6
x_i	6.28	6.47	6.54	7.02	6.45	6.40

$\bar{x}$ = 39.16/6 = 6.527 $S^2_x = 0.0659$

$U^{таб}$ для f = 6-2 = 4 p = 0.05 имеет значение 1.996

Подозреваемое значение $x_1 = 6.28$ $U^{\text{ðàñ÷}} = \dfrac{|6.28 - 6.527|}{\sqrt{0.0659 * \dfrac{6-1}{6}}}$ = 1.053

1.053<1.996 поэтому $x_1 = 6.28$ не является грубой ошибкой.

Подозреваемое значение $x_4 = 7.02$ $U^{\text{ðàñ÷}} = \dfrac{|7.02 - 6.527|}{\sqrt{0.0659 * \dfrac{6-1}{6}}}$ = 2.105

2.105>1.996 поэтому $x_4 = 7.02$ является грубой ошибкой и удаляется из серии n = 5

i	1	2	3	4	5
x_i	6.28	6.47	6.54	6.45	6.40

$\bar{x}$ = 32.14 / 5 = 6.428 $S^2_x = 0.0094$

$U^{таб}$ для f = 5-2 = 3 p = 0.05 имеет значение 1.869

Подозреваемое значение $x_1 = 6.28$ $U^{\text{ðàñ÷}} = \dfrac{|6.28 - 6.428|}{\sqrt{0.0659 * \dfrac{5-1}{5}}}$ = 1.709

1.709<1.869 поэтому $x_1 = 6.28$ не является грубой ошибкой.

Подозреваемое значение x_3. = 6.54 $U^{\text{ðàñ÷}} = \dfrac{|6.54 - 6.428|}{\sqrt{0.0659 * \dfrac{5-1}{5}}} = 1.294$

1.294<1.869 поэтому $x_1 = 6.28$ не является грубой ошибкой.

Для последней серии строим доверительный интервал

$t^{\text{таб}}_{0.05,\,4} = 2.78$ $\varepsilon_\beta = 2.78 * \sqrt{\dfrac{0.0094}{5}} = 0.12$

$6.308 < a^* < 6.548$

Сравнение двух серий измерений

Одна и та же величина может измеряться несколькими сериями. Это необходимо при сравнении надежности прибора, методики эксперимента. Сравнивать можно серии, у которых дисперсии однородны.

1. Проверяем однородность двух дисперсий, используя критерий Фишера

$$F_{(\text{ðàñ÷})} = \frac{S^2_{x(\text{áîëüø})}}{S^2_{x(\text{ìåíüø})}}. \text{ Если } F_{(\text{расч})} < F_{(\text{табл})},$$

   то дисперсии однородны. $F_{(\text{табл})}$ является функцией Р –уровня значимости, $f_{(\text{больш})}$ - число степеней свободы большей дисперсии и $f_{(\text{меньш})}$ - число степеней свободы меньшей дисперсии.

2. Вычисляем общую дисперсию по формуле

$$S^2_{x(\text{îáù})} = \frac{S^2_{x(\text{ïåðâ})} \cdot f_{(\text{ïåðâ})} + S^2_{x(\text{âòîð})} \cdot f_{(\text{âòîð})}}{f_{(\text{ïåðâ})} + f_{(\text{âòîð})}}$$

3. Проверяем различие между оценками средних используя критерий Стьюдента

$$t_{(\text{ðàñ÷})} = \frac{|\bar{x}_{(\text{ïåðâ})} - \bar{x}_{(\text{âòîð})}|}{\sqrt{S^2_{x(\text{îáù})} \cdot \left(\dfrac{1}{n_{(\text{ïåðâ})}} + \dfrac{1}{n_{(\text{âòîð})}}\right)}}$$

Если различие незначимо, то эти серии сравнимы и мы можем их объединить.