ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Основная задача теории погрешностей состоит в оценке погрешности результата вычислений при известных погрешностях исходных данных.

Источники и классификация погрешностей результата

Получить точное значение при решении задачи на машине практически невозможно. Получаемое решение всегда содержит погрешность и является приближенным. Источники погрешности:

- Погрешность математической модели
- Погрешность в исходных данных
- Погрешность численного метод.
- Погрешность округления или отбрасывания.

Погрешность математической модели определяется выбором математической модели. Так для описания падения тела с высоты h_0 и имеющего скорость v_0 используются уравнения:

$$h = h_0 - v_0 \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}; \qquad v=v_0+g\cdot t$$

при допущении, что тело обладает средней плотностью, значительно превышающей плотность воздуха, а его форма близка к шару. В этом случае можно пренебречь сопротивлением воздуха.

Если учитывать силу сопротивления F(t), действующую на тело массой m, тогда движение тела можно описать с помощью уравнений:

$$m \cdot \frac{dv}{vt} = m \cdot g - F(t), \quad \frac{dh}{dt} = -v, \qquad \text{при } t=0,\ v = v_0,\ h = h_0.$$

Погрешность в исходных данных определяется: погрешностью измерения или погрешностью вычислений, с помощью которых они были получены.

Погрешность численного метода определяется точностью выбранного числено метода и вычислительного средства.

$$\mathrm{Sin}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Типы погрешностей.

Пусть α^* – точное (и никогда неизвестное) значение некоторой величины, а α – приближенное значение этой же величины.

Абсолютной погрешностью приближенного значения α называется величина:

$$\overline{\Delta}(\alpha) = \left|\alpha - \alpha^*\right|$$

Относительной погрешностью приближенного значения α называется величина:

$$\overline{\delta}(\alpha) = \frac{\left|\alpha - \alpha^*\right|}{\left|\alpha\right|}$$

Так как точное значение α^* как правило, неизвестно, чаще получают оценки погрешностей вида:

$$\Delta(\alpha) \geq \left|\alpha - \alpha^*\right|$$

$$\delta(\alpha) \geq \frac{\left|\alpha - \alpha^*\right|}{\left|\alpha\right|}$$

Величины $\Delta(\alpha)$ и $\delta(\alpha)$ называют **предельной** абсолютной и относительной погрешностью соответственно. В вычислениях вместо абсолютной и относительной погрешностей будем использовать предельные погрешности.

Пример: Вычислить абсолютную и относительную погрешность числа π^*. Приближенное число π = 3.1. Более точное значение 3.14159.

Абсолютная погрешность (предельная абсолютная погрешность)

$\Delta(\pi)$ > | 3.14159 – 3.1 |, $\Delta(\pi)$ = 0.042.

Относительная погрешность (предельная относительная погрешность)

$\delta(\pi)$ = 0.042 / 3.1 = 0.014

Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева. Например, в числах α = 0.0$\underline{3045}$, α = 0.0$\underline{304500}$ значащими цифрами являются подчеркнутые цифры. Число значащих цифр в первом случае равно 4, во втором 6.

Значащую цифру называют **верной в широком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре или **верной в узком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Примеры: $\alpha = 0.0304500$. Верные цифры подчеркнуты.

$\Delta(\alpha)$	Верные цифры в числе			
	В широком смысле		В узком смысле	
0.001	2	$0.0\underline{30}4500$	1	$0.0\underline{3}04500$
0.005	1	$0.0\underline{3}04500$	1	$0.0\underline{3}04500$
0.0003	2	$0.0\underline{30}4500$	2	$0.0\underline{30}4500$
0.00007	3	$0.0\underline{304}500$	2	$0.0\underline{30}4500$

Правила округления: Известны. Обратить внимание, что: если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра остается неизменной, если она четная (правило четной цифры), и увеличивается на единицу, если она нечетная. При этом погрешность не превышает пяти единиц отброшенного разряда.

Пример: 6.71→6.7 ; 6.77→6.8 ; 6.75→6.8; 6.65→6.6

В ЭВМ происходит отбрасывание или усечение. В некоторых языках работают правила округления.

$\delta(\pi) = 0.042 / 3.1 = 0.014$

Правила округления: Известны. Обратить внимание, что:

Если первая из отброшенных цифр равна 5 и все остальные отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра остается неизменной, если она четная (правило четной цифры), и увеличивается на единицу, если она нечетная.

При этом погрешность не превышает пяти единиц отброшенного разряда.

Пример: 6.71 - 6.7 ; 6.77 - 6.8 ; 6.75 - 6.8; 6.65 - 6.6

В ЭВМ происходит отбрасывание или усечение. В некоторых языках работают правила округления.

Особенности машинной арифметики

Вещественные числа в ЭВМ представляются в экспоненциальном виде (с плавающей точкой):

$D = \pm m * b^{\pm n}$, где m - мантисса ,b-основание системы счисления n - порядок

Для простоты возьмем десятичную систему счисления

$D = \pm m * 10^{\pm n}$, где m - мантисса и n – порядок

Примеры записи чисел:

5	$0.05 \cdot 10^2$
172	$17.2 \cdot 10^1$
0.8157	$0.008157 \cdot 10^2$
521.45	$52145 \cdot 10^{-2}$, $5.2145 \cdot 10^2$ и $0.52145 \cdot 10^3$

Если представить мантиссу в виде $m = 0.d_1\ d_2\ d_3\ d_4 \ldots \ldots \ldots d_k$, то при d_1#0 получаем нормализованную форму числа, где к - количество цифр в мантиссе, называют разрядной сеткой.

Так $0.52145 \cdot 10^3$ есть нормализованное представление числа.

Примеры:

$0.512 \cdot 10^4$ разр.сетка = 3

$0.5200 \cdot 10^4$ разр.сетка = 4

Если к = 3 то, число

5 представим как $0.500 \cdot 10^1$

172 представим как $0.172 \cdot 10^3$

0.008157 представим как $0.815 \cdot 10^{-2}$

521.45 представим как $0.521 \cdot 10^3$

В последних двух примерах цифры, выходящие за разрядную сетку отброшены. При этом погрешность округления не превышает единицы последнего оставленного разряда.

Выполнение операций над вещественными числами начинается и заканчивается выравниванием порядков. Если порядки различны - погрешность возрастает и может привести к потере точности.

По возможности надо избегать работать с числами, порядки которых отличаются на величину, близкую к длине разрядной сетки, а также вычитания близких по значению величин.

Сложить слева направо и наоборот следующие числа:

$0.522 \cdot 10^0$, $0.157 \cdot 10^{-1}$, $0.186 \cdot 10^{-1}$, $0.239 \cdot 10^{-1}$

$0.522 \cdot 10^0$	$0.239 \cdot 10^{-1}$
$+0.015 \cdot 10^0$	$+\ 0.186 \cdot 10^{-1}$
$0.537 \cdot 10^0$	$0.425 \cdot 10^{-1}$
$+0.018 \cdot 10^0$	$+0.157 \cdot 10^{-1}$
$0.555 \cdot 10^0$	$0.582 \cdot 10^{-1}$
$+0.023 \cdot 10^0$	$0.058 \cdot 10^0$
$0.578 \cdot 10^0$	$+0.522 \cdot 10^0$
	$0.580 \cdot 10^0$

Погрешности вычислений.

1. Абсолютная погрешность суммы или разности нескольких чисел не превосходит суммы абсолютных погрешностей этих чисел.
$$\Delta(a \pm b) \le \Delta(a) + \Delta(b)$$
2. Относительная погрешность суммы:
$$\delta(a + b) \le \delta_{max}$$
3. Относительная погрешность разности:
$$\delta(a - b) \le \nu\delta_{max}, \quad \text{где } \nu = \frac{|a + b|}{|a - b|}$$
4. Относительные погрешности произведения и частного:
$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b)$$
$$\delta(\frac{a}{b}) = \delta(a) + \delta(b)$$
5. Абсолютная погрешность дифференцируемой функции многих переменных:
$$u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$
$$\Delta u \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta(x_i)$$

Пример 1:
Для заданной функции:

$$y = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3}$$

определить y, $\Delta(y)$ и $\delta(y)$ при $x_1 = -1.5 \quad x_2 = 1.0 \quad x_3 = 2.0$. Все цифры в данных верные для x_1 в широком смысле, а для x_2 и x_3 в узком смысле. Вычисляем значение функции.

$$y = \frac{-1.5^2 + 1.0^2}{2.0} = 1.625$$

Вычисляем погрешности:

$$\Delta(x_1) = 0.10 \quad \Delta(x_2) = 0.05 \quad \Delta(x_3) = 0.05$$

$$\Delta(y)=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial y}{x_i}\right|\cdot\Delta(x_i)$$

$$\Delta(y)=\left|\frac{2x_1}{x_3}\right|\cdot\Delta(x_1)+\left|\frac{2x_2}{x_3}\right|\cdot\Delta(x_2)+\left|-\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}\right|\cdot\Delta(x_3)$$

$$\Delta(y)=\left|\frac{2\cdot(-1.5)}{2.0}\right|\cdot 0.10+\left|\frac{2\cdot 1.0}{2.0}\right|\cdot 0.05+\left|\frac{-1.5^2+1.0^2}{2.0^2}\right|\cdot 0.05$$

$$\Delta(y)=0.150+0.050+0.041=0.241$$

$$\delta(y)=\frac{0.242}{1.625}=0.149$$

Пример 2:

y=f(x); y=x^2 ; x=1.00; Δ x=0.01; $\delta x=0.01$

y=1.00; $\Delta y=\left|\frac{dy}{dx}\right|*\Delta x=\left|2*x\right|*\Delta x=2*0.01=0.02 \quad \delta y=0.02$

Пример 3:

2. y=f(x); y=x^20 ; x=1.00; Δ x=0.01; $\delta x=0.01$

y=1.00; $\Delta y=\left|\frac{dy}{dx}\right|*\Delta x=\left|20*x^{19}\right|*\Delta x=20*0.01=0.2 \quad \delta y=0.2$

Обусловленность будем определять как отношение $\delta(y)/\delta(x)$**.** Так пример 2 хорошо обусловлен $\delta(y)/\delta(x)$=2, а пример 3 плохо $\delta(y)/\delta(x)$=20. Задачи с большим отношением $\delta(y)/\delta(x)$ называют плохо обусловленными, иначе - хорошо обусловленными. Плохо обусловленные задачи лучше не решать, а подумать над другим способом представления модели , выбрать иной метод или изменить алгоритм . Часто это возможно.

Влияние способа записи формулы на точность результата.

Пример: Пусть требуется отыскать наименьший корень уравнения y^2-140y+1=0

Вычисления проводить с 4 разрядами

$y=70-\sqrt{4899}$, $\sqrt{4899}=69.992956....$ после округления = 69.99

$y\approx 70-69.99=0.01\underline{1000}$

избавимся от иррациональности в числители

$y=\frac{(70-\sqrt{4899})*(70+\sqrt{4899})}{(70+\sqrt{4899})}=\frac{1}{70+69.99}=\frac{1}{140}$ =0.007142857..=0.00$\underline{7143}$