Численные методы решения дифференциальных уравнений и их систем.

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения, устанавливающего связь между независимой переменной x, неизвестной функцией y и ее производными $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, может мыть представлен следующим образом:

$$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

Порядок наивысшей производной, входящей в уравнение, называется порядком этого уравнения. Решение дифференциального уравнения (интегрированием) является некоторая функциональная зависимость $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Общее решение дифференциального уравнения записывается в виде

$y = y(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - произвольные постоянные.

Решение, полученное из общего решения при фиксированных значениях $c_1, c_2, \ldots, c_n$, называется частным решением уравнения. Постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$ можно определить, задав n условий. Если эти условия заданы как совокупность значений искомой функции и всех ее производных до (n-1)^{ого} порядка включительно в некоторой течке x_0, то задача решения уравнения называется задачей Коши, а заданные условия

$$\begin{aligned} &y(x_0) = y_0 \\ &y'(x_0) = y'_0 \\ &y''(x_0) = y''_0 \\ &\vdots \\ &y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

называются начальными условия.

Если же условия заданы при нескольких значениях x, то задача решения дифференциального уравнения будет называться граничной или краевой задачей.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0$$

соотношение часто удается записать в виде

$$y' = f(x, y)$$

Последнее уравнение называется дифференциальным уравнением, разрешенным относительно производной. Значение производной равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке (x, y). Функцию $f(x, y)$ будем называть правой частью дифференциального уравнения.

Общим решением уравнения будет являться семейство функций $y = y(x, c_1)$ различающихся значение постоянной c_1. Задаем одно начальное условие $y(x_0) = y_0$, которое определяет значение c_1 и конкретное частное решение – задача Коши.

Для простейшего дифференциального уравнения $y' = 3 \cdot x^2$. Общее решение имеет вид $y = x^3 + c$, а при начальном условии $x_0 = 1, y_0 = 2$ $c = 1$ определим частное решение как $y = x^3 + 1$

Метод Эйлера

Дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Требуется найти решение на отрезке [a,b]. Разобьем отрезок интегрирования на n равных частей. Тогда величина шага интегрирования будет равна $h = \frac{b-a}{n}$.

Значение функции y_1 в точке x_1 можно определить как точку пересечения касательной проведенной к функции $y = y(x)$ в точке (x_0, y_0) с вертикальной прямой проходящей через точку x_1.

Показать на графике

Тангенс угла наклона касательной есть значение производной в точке (x_0, y_0) и задается правой частью дифференциального уравнения, т.е.

$tg(\beta) = f(x_0, y_0)$. С другой стороны из геометрического представления метода можно записать

$$tg(\beta) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

Следовательно $\frac{y_1 - y_0}{h} = f(x_0, y_0)$ Откуда $\begin{array}{l} y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \\ x_1 = x_0 + h \end{array}$

Затем $\begin{array}{l} y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \\ x_2 = x_1 + h \end{array}$ и т.д.

Решение будет заключаться в последовательном применении формул:

$\begin{array}{l} y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ x_i = x_{i-1} + h \end{array}$, где i = 1, 2, 3, …, n

Результат будет представлен функцией заданной таблицей.

Пример

$$y' = -\frac{y}{x}; \quad a = 1; \quad b = 2; \quad n = 2; \quad h = 0.5 \quad x_0 = 1; \quad y_0 = -2; \quad y = \frac{C}{x} \quad C = -2$$

y_1 = -2+0.5*(-(-2/1)) = -1 x_1 = 1+0.5 =1.5

y_2 = -1+0.5*(-(-1/1.5)) = --0.666 x_1 = 1.5+0.5 =2

X	Y(Эйлер)	Y(теор)
1	-2	-2
1.5	-1	-1.33333
2	-0.66667	-1

Модифицированный метод Эйлера

Графическая интерпретация.

Определяем точку $x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}$ и вычисляем значение функции в этой точке

$$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0)$$

Значение функции y_1 в точке x_1 определяем, как точку пересечения касательной, вычисленной в точке $(x_{1/2}, y_{1/2})$ и проведенной к функции $y = y(x)$ в точке (x_0, y_0), с вертикальной прямой проходящей через точку x_1.

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_{1/2}, y_{1/2}) \quad \text{или} \quad y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0))$$

$$x_1 = x_0 + h$$

произвольную точку определим

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1/2}, y_{i-1/2}) \quad \text{или} \quad y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2} f(x_{i-1}, y_{i-1}))$$, где i = 1, 2, 3,

$$x_i = x_{i-1} + h$$

…, n

Пример

$$y' = -\frac{y}{x}; \quad a = 1; \quad b = 2; \quad n = 2; \quad h = 0.5 \quad x_0 = 1; \quad y_0 = -2; \quad y = \frac{C}{x} \quad C = -2$$

$y_{1/2}$ = -2+0.25*(-(-2/1)) = -1.5; $x_{1/2}$ = 1+0.25 = 1.25
y_1 = -2+0.5*(-(-1.5/1.25)) = -1.4; x_1 = 1+0.5 = 1.5
$y_{3/2}$ = -1.4 +0.25*(-(-1.4/1.5)) = -1.1667; $x_{3/2}$ = 1.5+0.25 = 1.75
y_2 = -1.4 +0.5*(-(-1.1667/1.75)) = -1.0667; y_2 = 1.5+0.5 = 2

X	Y(мод.)	Y(теор)
1	-2	-2
1.5	-1.4	-1.33333
2	-1.06667	-1