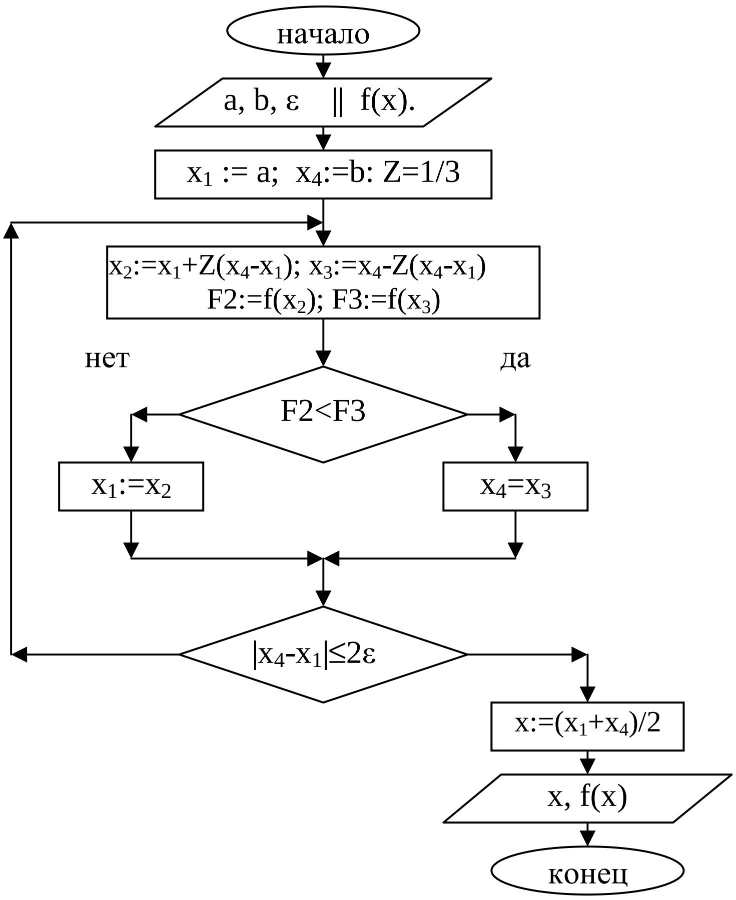
Методы одномерной оптимизации.

Дана некоторая функция f(x) от одной переменной x, надо определить такое значение x^*, при котором функция f(x) принимает экстремальное значение. Под ним обычно понимают минимальное или максимальное значения. В общем случае функция может иметь одну или несколько экстремальных точек. Нахождение этих точек с заданной точностью можно разбить на два этапа. Сначала экстремальные точки отделяют, т.е. определяются отрезки, которые содержат по одной экстремальной точке, а затем уточняют до требуемой точности ε. Отделение можно осуществить, как графически, так и табулированием. Все методы уточнения точек экстремумов будем рассматривать относительно уточнения минимума на заданном отрезке.

Метод деления на три равных отрезка.

1. Дан отрезок [a;b] на котором определена функция f(x) и точность ε. Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Введём новое обозначение точек x_1=a и x_4=b. И вычислим Z=1/3.
2. Делим отрезок на три равные части и определяем точку $x_2=x_1+Z(x_4-x_1)$ и точку $x_3=x_4-Z(x_4-x_1)$. Вычисляем значения функции в этих точках $F2=f(x_2)$ $F3=f(x_3)$.
3. Определяем новый отрезок, содержащий точку экстремума, сравнив значения функций F2 и F3. Если F2 < F3, то границы нового отрезка определим как $x_1=x_1$, а $x_4=x_3$, иначе $x_1=x_2$, а $x_4=x_4$.
4. Проверяем условие окончания итерационного процесса $| x_4-x_1 | \le 2ε$. Если оно выполняется, то определим решение, как $x=(x_4+x_1)/2$ и значение функции в этой точке f(x). Иначе перейдем на пункт 2.

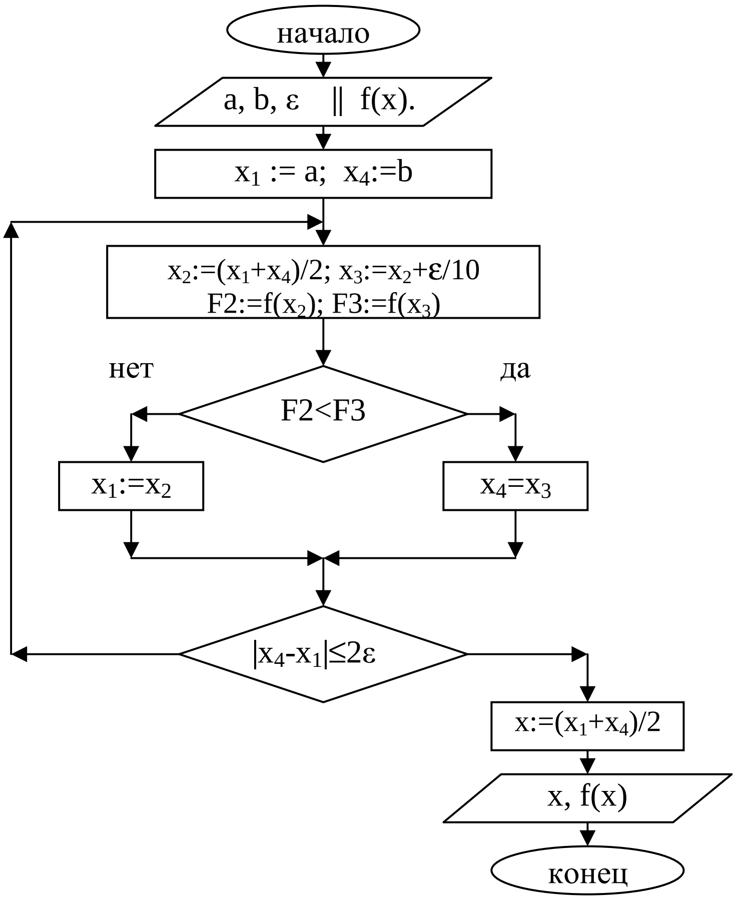


Введем понятие эффективности, как отношение доли сокращения отрезка к количеству вычисления функции на одной итерации тогда: Q=0,33/2≈0,17.

Попробуем увеличить долю сокращения отрезка.

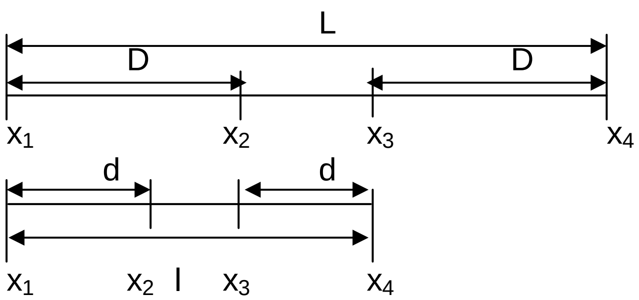
Метод деления отрезка пополам.

1. Дан отрезок [a;b] на котором определена функция f(x) и точность ε. Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Введём новое обозначение точек x_1=a и x_4=b.
2. Делим отрезок пополам и определяем точку середины $x_2=(x_4+x_1)/2$ и точку x_3, отстоящую на незначительное расстояние от середины $x_3=x_2+\varepsilon/10$. Вычисляем значения функции в этих точках $F2=f(x_2)$ $F3=f(x_3)$.
3. Определяем новый отрезок, содержащий точку экстремума, сравнив значения функций F2 и F3. Если $F2 < F3$, то границы нового отрезка определим как $x_1=x_1$, а $x_4=x_3$, иначе $x_1=x_2$, а $x_4=x_4$.
4. Проверяем условие окончания итерационного процесса $| x_4-x_1 | \le 2\varepsilon$. Если оно выполняется, то определим решение, как $x=(x_4+x_1)/2$ и значение функции в этой точке f(x). Иначе перейдем на пункт 2.



Эффективность метода Q≈0,5/2=0,25

Попробуем разбивать отрезок на такие части, чтобы одну из двух точек и соответствующее значение функции мы могли использовать на следующей итерации.



$$\frac{D}{L}=\frac{d}{l};\ d=L-2D;\ l=L-D;\ \frac{D}{L}=\frac{(L-2D)}{(L-D)};\ DL-D^2=L^2-2DL$$

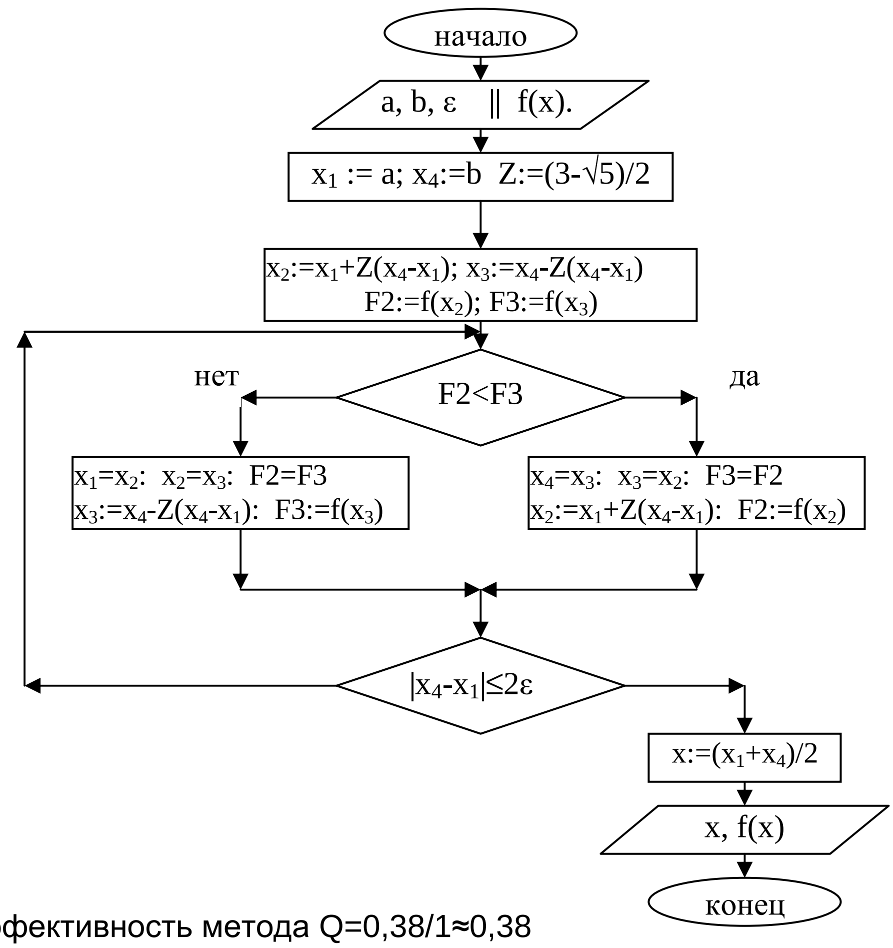
делим на L^2 $\quad \frac{D}{L}-\left(\frac{D}{L}\right)^2-1+2\cdot\frac{D}{L}=0$

Заменяем $Z=\frac{D}{L}$ $\quad Z^2-3Z+1=0$

Решая получим $Z=\frac{(3-\sqrt{5})}{2}\approx 0.3819$

Метод золотого сечения.

1. Дан отрезок [a;b] на котором определена функция f(x) и точность ε. Надо уточнить точку минимума с заданной точностью. Вычислим $Z=\frac{(3-\sqrt{5})}{2}$ и введём новое обозначение точек x_1=a и x_4=b
2. Делим отрезок на три части и определяем точку $x_2=x_1+Z(x_4-x_1)$ и точку $x_3=x_4-Z(x_4-x_1)$. Вычисляем значения функции в этих точках $F2=f(x_2)$ $F3=f(x_3)$.
3. Определяем новый отрезок, содержащий точку экстремума, сравнив значения функций F2 и F3. Если F2 < F3, то пункт 4 иначе пункт 5
4. границы нового отрезка определим как $x_1=x_1$, $x_4=x_3$, а $x_3=x_2$, F3=F2, $x_2=x_1+Z(x_4-x_1)$ и $F2=f(x_2)$ пункт 6
5. границы нового отрезка определим как $x_1=x_2$, $x_4=x_4$, а $x_2=x_3$, F2=F3, $x_3=x_4-Z(x_4-x_1)$ и $F3=f(x_3)$ пункт 6
6. Проверяем условие окончания итерационного процесса $|x_4-x_1|\le 2\varepsilon$. Если оно выполняется, то определим решение, как $x=(x_4+x_1)/2$ и значение функции в этой точке f(x). Иначе перейдем на пункт 3.



Эффективность метода Q=0,38/1≈0,38