

6. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Пример. Вычислить значение определенного интеграла

$$I = \int_{0.6}^{1.1} (x+1) \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$$

всеми численными методами на заданном отрезке [0.6; 1.1] при числе разбиений $n=5$. Шаг интегрирования:

$$h = \frac{1.1 - 0.6}{5} = 0.1$$

Строим таблицу значений подынтегральной функции в точках деления отрезка и в средних точках.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000	1.1000
y_i	1.5741	1.6492	1.7086	1.7463	1.7552	1.7273
$x_{i+1/2}$	0.6500	0.7500	0.8500	0.9500	1.0500	
$y_{i+1/2}$	1.6133	1.6812	1.7306	1.7548	1.7463	

Метод прямоугольников вперед.

$$s_i = y_i; \quad I = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i-1}$$

$$I = 0.1 \cdot (1.5741 + 1.6492 + 1.7086 + 1.7463 + 1.7552) = 0.8433$$

Метод прямоугольников назад.

$$s_i = h \cdot y_{i+1}; \quad I = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1}$$

$$I = 0.1 \cdot (1.6492 + 1.7086 + 1.7463 + 1.7552 + 1.7273) = 0.8587$$

Метод прямоугольники в среднем.

$$s_i = h \cdot y_{i+1/2}; \quad I = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1/2}$$

$$I = 0.1 \cdot (1.6133 + 1.6812 + 1.7306 + 1.7548 + 1.7463) = 0.8526$$

Метод трапеций.

$$s_i = h \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2}; \quad I = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

$$I = 0.1 \cdot \left(\frac{1.5741}{2} + 1.6492 + 1.7086 + 1.7463 + 1.7552 + \frac{1.7273}{2} \right) = 0.8510$$

Метод Симпсона.

$$I = \frac{h}{6} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + 4 \cdot y_{i+1/2} + y_{i+1}) = \frac{h}{6} \left(y_0 + 4 \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1/2} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i + y_n \right)$$

$$I = \frac{0.1}{6} (1.5741 + 4 \cdot (1.6133 + 1.6812 + 1.7306 + 1.7548 + 1.7463) + 2 \cdot (1.6492 + 1.7086 + 1.7463 + 1.7552) + 1.7278) = 0.8521$$

Задания. Вычислить значение определенного интеграла на заданном отрезке при числе разбиений $n=10$.

$$1. \int_{0.5}^{1.5} \frac{\sqrt{x^2 + 5} dx}{2x + \sqrt{x^2 + 0.5}}$$

$$2. \int_{0.5}^{1.5} \frac{\sqrt{0.5x + 2} dx}{\sqrt{2x^2 + 1} + 0.8}$$

$$3. \int_{0.5}^{1.5} \frac{\sqrt{0.8x^2 + 1} dx}{0.5x + \sqrt{1.5x^2 + 2}}$$

$$4. \int_{0.5}^{1.5} \frac{\sqrt{1.5x + 0.6} dx}{0.5 \cdot 1.6 + \sqrt{0.8x^2 + 2}}$$

$$5. \int_{0.5}^{1.5} \frac{\sqrt{0.8x^2 + 1} dx}{0.5x + \sqrt{1.5x^2 + 2}}$$

$$6. \int_{0.5}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

7.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3.2}}$$

8.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1.3}}$$

9.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

10.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$$

11.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{2 + 0.5x^2}}$$

12.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{13x^2 - 1}}$$

13.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{0.5 + x^2}}$$

14.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{0.4 + 1.5x^2}}$$

15.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + 0.7}}$$

16.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{6x dx}{\sqrt{0.1x^2 + 1.8}}$$

17.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{(x + 2)dx}{\sqrt{0.2x^2 + 0.1}}$$

18.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\ln(x + 2)}{x} dx$$

19.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x^2 + 1} dx$$

20.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\cos x}{x + 1} dx$$

21.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$$

22.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + 1)}{x} dx$$

23.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\cos x}{x + 2} dx$$

24.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + 0.5)}{1 + 2x^2} dx$$

25.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\sin x}{x + 1} dx$$

26.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\ln(x^2 + 2)}{x + 1} dx$$

27.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\cos(x^2)}{x + 1} dx$$

28.
$$\int_{0.5}^{1.5} \frac{\sin(x^2 - 1)}{2\sqrt{x}} dx$$

29.
$$\int_{0.5}^{1.5} (x + 1) \sin x dx$$

30.
$$\int_{0.5}^{1.5} \sqrt{x} \cos(x^2) dx$$

$$31. \int_{0.5}^{1.5} (2x + 0.5) \sin x \, dx$$

$$32. \int_{0.5}^{1.5} x^2 \operatorname{tg} x \, dx$$