

5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ

Пример. Функция $y=f(x)$ определена таблицей

i	0	1	2	3
x_i	0.500	1.100	1.700	2.300
y_i	-0.7780	0.2108	-0.0244	-0.1876

Определить интерполяционный многочлен $L(x)$ по четырём узловым точкам.

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3)} \cdot y_0 =$$

$$= \frac{(x - 1.1) \cdot (x - 1.7) \cdot (x - 2.3)}{(0.5 - 1.1) \cdot (0.5 - 1.7) \cdot (0.5 - 2.3)} \cdot (-0.778) =$$

$$= 0.6003x^3 - 3.0616x^2 + 4.9886x - 2.5819$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)} \cdot y_1 =$$

$$= \frac{(x - 0.5) \cdot (x - 1.7) \cdot (x - 2.3)}{(1.1 - 0.5) \cdot (1.1 - 1.7) \cdot (1.1 - 2.3)} \cdot 0.2108 =$$

$$= 0.4880x^3 - 2.1958x^2 + 2.8839x - 0.9540$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_3)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)} \cdot y_2 =$$

$$= \frac{(x - 0.5) \cdot (x - 1.1) \cdot (x - 2.3)}{(1.7 - 0.5) \cdot (1.7 - 1.1) \cdot (1.7 - 2.3)} \cdot (-0.0244) =$$

$$= 0.0565x^3 - 0.2203x^2 + 0.2389x - 0.0714$$

$$l_3(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_3 - x_0) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)} \cdot y_3 =$$

$$= \frac{(x-0.5) \cdot (x-1.1) \cdot (x-1.7)}{(2.3-0.5) \cdot (2.3-1.1) \cdot (2.3-1.7)} \cdot (-0.1876) =$$

$$= -0.1448x^3 + 0.4777x^2 - 0.4733x + 0.1354$$

$$L(x) = \sum_{i=0}^3 l_i(x) = 1.0000x^3 - 5.0000x^2 + 7.6381x - 3.4719$$

Задания. Определить интерполяционный многочлен $L(x)$ по четырём узловым точкам.

№	i	0	1	2	3
1	x_i	-2.4000	-1.7000	-1.0000	-0.5000
	y_i	7.2139	0.0453	-7.3310	-11.5870
2	x_i	-0.3000	0.6000	1.3000	1.8000
	y_i	-12.2327	-14.2776	-8.9511	-0.1808
3	x_i	-1.9000	-1.3000	-0.6000	0.1000
	y_i	4.3845	-2.0413	-9.1160	-13.7759
4	x_i	-1.3000	-0.5000	0.0000	0.7000
	y_i	-0.9091	-9.0800	-12.7880	-14.4915
5	x_i	-1.7000	-0.8000	-0.1000	0.7000
	y_i	4.4686	-5.1524	-11.4706	-14.5634
6	x_i	-1.9000	-1.4000	-0.6000	0.2000
	y_i	7.3971	2.4205	-6.1379	-12.7417
7	x_i	-1.7000	-1.2000	-0.4000	0.1000
	y_i	6.5122	1.3934	-7.0930	-11.4122
8	x_i	-0.6000	0.0000	0.8000	1.7000
	y_i	-3.9745	-9.8070	-14.3323	-11.4626
9	x_i	-2.0000	-1.3000	-0.7000	-0.1000
	y_i	10.6430	4.6305	-1.7781	-7.9772
10	x_i	-0.6000	0.1000	0.7000	1.6000
	y_i	-1.7342	-8.8626	-13.1951	-13.6472
11	x_i	-1.8000	-1.1000	-0.4000	0.3000
	y_i	10.6930	4.7113	-2.7738	-9.7043
12	x_i	-0.3000	0.6000	1.5000	2.0000
	y_i	-2.7294	-11.2640	-14.5270	-12.4520
13	x_i	-1.3000	-0.5000	0.0000	0.9000
	y_i	8.5147	0.5750	-4.8150	-12.5741

14	x_i	-2.7000	-2.0000	-1.1000	-0.6000
	y_i	11.4472	12.9340	7.6888	2.7658
15	x_i	-1.2000	-0.7000	0.1000	0.8000
	y_i	9.3859	4.8763	-3.6723	-10.3985
16	x_i	-2.8000	-2.2000	-1.5000	-1.0000
	y_i	8.6580	12.8160	11.9395	8.6170
17	x_i	-2.2000	-1.3000	-0.5000	0.4000
	y_i	12.4561	11.4432	4.9573	-4.6451
18	x_i	-2.0000	-1.5000	-0.7000	-0.1000
	y_i	12.7890	12.7297	7.8312	1.8733
19	x_i	-2.3000	-1.7000	-1.1000	-0.4000
	y_i	10.5265	13.1059	11.4870	6.0210
20	x_i	-2.9000	-2.1000	-1.5000	-0.7000
	y_i	0.4013	11.2765	13.0968	9.5396
21	x_i	-1.8000	-1.1000	-0.3000	0.6000
	y_i	12.3896	12.4446	7.0413	-2.3344
22	x_i	-0.7000	0.1000	0.6000	1.5000
	y_i	10.9759	4.1477	-1.2041	-10.1670
23	x_i	-1.3000	-0.7000	0.1000	0.7000
	y_i	13.0979	11.5757	5.2005	-1.1601
24	x_i	-0.5000	0.1000	0.9000	1.8000
	y_i	11.0260	6.2169	-2.2023	-10.8967
25	x_i	-0.1000	0.8000	1.3000	1.9000
	y_i	8.9142	0.0178	-5.3474	-10.8642
26	x_i	-1.2000	-0.7000	-0.2000	0.6000
	y_i	12.6896	12.8158	10.4340	3.2784
27	x_i	-2.8000	-2.1000	-1.6000	-1.0000
	y_i	-16.7440	1.8299	9.2596	12.9420
28	y_i	-1.5000	-0.6000	0.0000	0.6000
	x_i	9.2168	13.0256	10.4880	5.4008
29	y_i	-2.0000	-1.5000	-1.0000	-0.5000
	x_i	-0.3760	8.0197	12.2390	13.0317
30	y_i	-0.5000	0.4000	1.2000	1.9000
	x_i	13.1117	9.0766	1.3214	-6.1627
31	x_i	-0.4000	0.5000	1.2000	2.1000
	y_i	13.1127	9.1097	2.4381	-7.1146
32	x_i	-2.6000	-2.0000	-1.4000	-0.7000
	y_i	-28.9130	-8.0670	5.0110	12.1796

5.2. Аппроксимация. Метод наименьших квадратов

Пример. Определить параметры зависимости вида $y = a_0 + a_1 \cdot x$, используя метод наименьших квадратов, по следующим экспериментальным данным:

\vec{x}	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00
\vec{y}	3.01	6.61	14.17	25.24	39.44	57.39

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.00 \\ 1 & 1.00 \\ 1 & 2.00 \\ 1 & 3.00 \\ 1 & 4.00 \\ 1 & 5.00 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N} = \vec{\Phi}^T \cdot \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.00 & 1.00 & 2.00 & 3.00 & 4.00 & 5.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.00 \\ 1 & 1.00 \\ 1 & 2.00 \\ 1 & 3.00 \\ 1 & 4.00 \\ 1 & 5.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \vec{\Phi}^T \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0.00 & 1.00 & 2.00 & 3.00 & 4.00 & 5.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3.01 \\ 6.61 \\ 14.17 \\ 25.24 \\ 39.44 \\ 57.39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 145.86 \\ 555.38 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = \vec{N}^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 0.5238 & -0.1429 \\ -0.1429 & 0.0571 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 145.86 \\ 555.38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.9371 \\ 10.8989 \end{bmatrix}$$

$$y = -2.9371 + 10.8989x$$

Задания. Определить параметры зависимости вида $y = a_0 + a_1 \cdot x$, используя метод наименьших квадратов, по следующим экспериментальным данным:

№	Экспериментальные данные						
	\vec{x}						
1	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	3,46	5,68	10,70	17,19	25,40	36,42
2	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	2,54	6,91	13,79	22,99	35,80	51,62
3	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	0,93	4,24	10,25	20,02	33,50	49,34
4	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	2,60	6,01	13,55	24,13	38,74	56,25
5	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	3,24	7,11	14,03	23,27	35,00	50,46
6	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	2,65	5,03	8,80	16,11	24,60	35,13
7	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	4,93	7,90	14,67	24,17	37,64	55,17
8	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	2,21	5,14	12,35	24,25	39,05	58,27

9	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,21	5,12	10,10	17,28	26,81	38,71
10	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,87	5,84	11,91	20,47	33,33	47,99
11	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,21	5,91	12,60	21,84	34,88	50,51
12	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	2,83	5,83	12,28	21,43	32,80	47,50
13	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	2,75	5,68	12,67	22,34	35,39	52,76
14	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,11	3,66	8,23	15,12	24,13	36,16
15	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	3,32	6,64	13,26	23,65	37,49	54,76
16	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	3,46	6,98	13,05	23,04	36,67	53,60
17	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	3,14	6,15	12,79	21,97	35,85	52,02
18	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	2,56	5,65	12,24	22,14	35,41	50,35
19	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	4,17	8,76	17,60	29,12	45,61	65,62

20	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	2,65	6,01	10,41	17,30	26,25	36,77
21	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,81	4,01	9,20	15,95	24,90	36,42
22	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,18	3,92	11,20	22,12	37,07	55,54
23	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,76	4,10	9,35	18,63	29,54	44,73
24	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,01	4,97	11,38	21,30	34,27	51,90
25	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,20	3,96	8,29	13,75	22,26	33,34
26	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	4,99	8,13	13,25	19,90	29,17	40,70
27	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	4,49	8,53	16,66	27,76	43,77	63,17
28	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,56	5,38	10,79	20,44	31,79	45,19
29	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	3,95	7,02	12,63	21,73	33,26	48,22
30	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,52	5,18	11,31	19,46	29,70	41,64

31	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	5,30	7,92	14,24	23,81	36,36	51,69
32	\vec{x}	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00
	\vec{y}	1,06	4,77	12,84	23,48	39,17	57,40