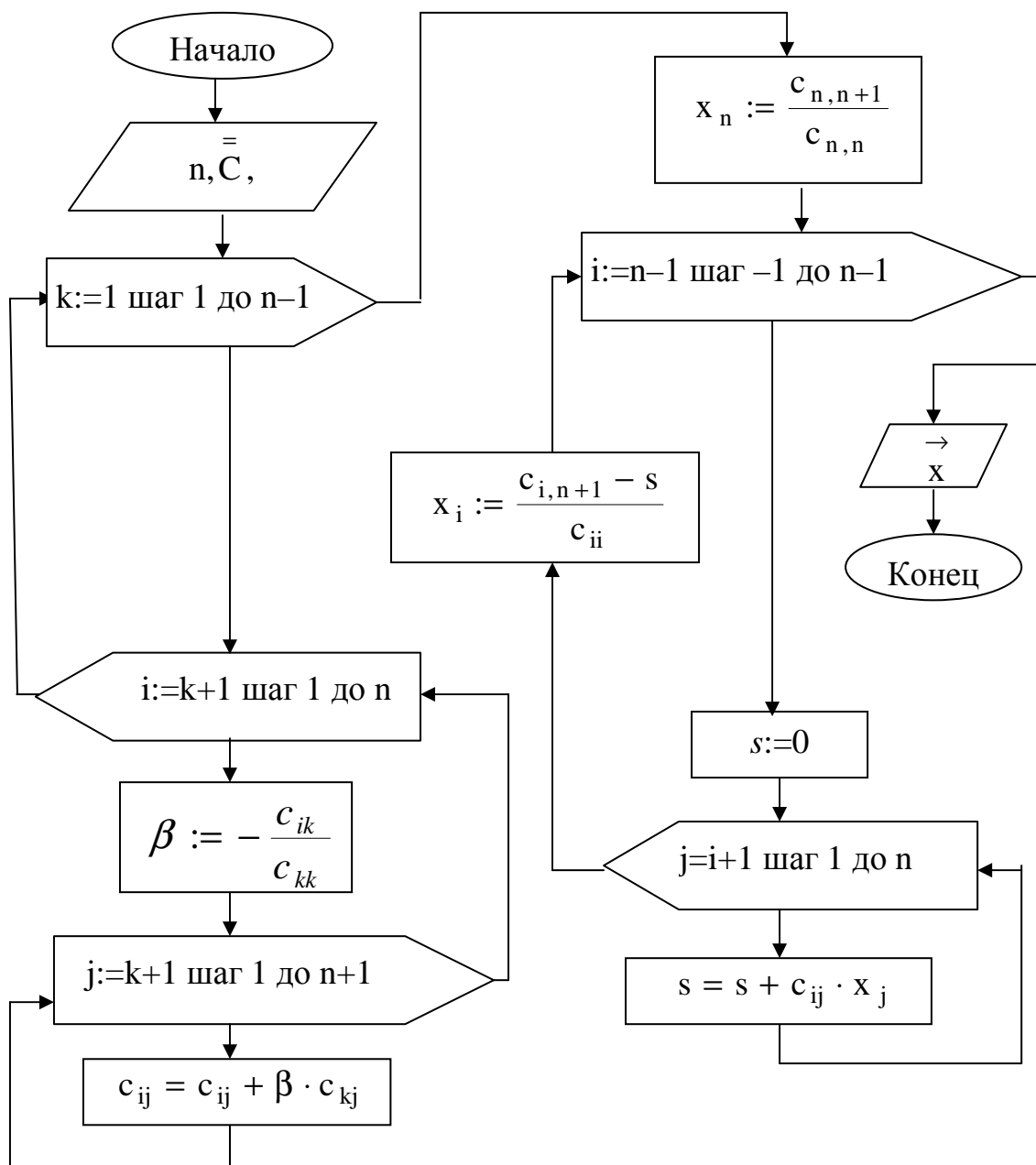


4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Блок-схема метода Гаусса



Программа решения СЛАУ методом Гаусса
Исполняемая процедура

Option Explicit

Option Base 1

Sub Gauss()

Dim n% As Integer

Dim c() As Single, x() As Single

Dim i%, j%, k%

Dim bet As Single, s As Single

Cells(1,1)="n="

n = Cells(1, 2)

ReDim c(n, n + 1), x(n)

‘ввод расширенной матрицы

For i = 1 To n

For j = 1 To n + 1

c(i, j) = Cells(i + 1, j)

Next j

Next i

‘первый этап (прямой ход)

For k = 1 To n - 1

For i = k + 1 To n

bet = -c(i, k) / c(k, k)

For j = k To n + 1

c(i, j) = c(i, j) + bet * c(k, j)

Next j

Next i

Next k

‘второй этап (обратный ход)

x(n) = c(n, n + 1) / c(n, n)

For i = n - 1 To 1 Step -1

s = 0

For j = i + 1 To n

s = s + c(i, j) * x(j)

Next j

x(i) = (c(i, n + 1) - s) / c(i, i)

Next i

‘вывод результата

For j = 1 To n

Cells(n + 3, j) = x(j)

Next j

End Sub

Пример. Решить СЛАУ методом Гаусса.

$$\begin{bmatrix} -7.000 & -2.000 & 2.000 \\ 1.000 & -7.000 & -3.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.000 \\ -7.000 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Первый этап. Строим расширенную матрицу и преобразуем её к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 1.000 & -7.000 & -3.000 & -7.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 & -5.000 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 0.000 & -7.286 & -2.714 & -8.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 & -5.000 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 0.000 & -7.286 & -2.714 & -8.000 \\ 0.000 & -0.143 & -5.857 & -2.000 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -7.000 & -2.000 & 2.000 & -7.000 \\ 0.000 & -7.286 & -2.714 & -8.000 \\ 0.000 & 0.000 & -5.804 & -1.843 \end{array} \right]$$

Второй этап. Вычисляем неизвестные.

$$x_3 = \frac{-1.843}{-5.804} = 0.318$$

$$x_2 = \frac{(-8 - (-2.714 \cdot 0.318))}{-7.286} = 0.980$$

$$x_1 = \frac{(-7 - (-2 \cdot 0.980 + 2 \cdot 0.318))}{-7} = 0.811$$

$$\text{ответ } \vec{x} = \begin{bmatrix} 0.811 \\ 0.980 \\ 0.318 \end{bmatrix}$$

Пример. Решить СЛАУ методом Гаусса с частичным выбором.

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 6.000 & -1.000 \\ 2.000 & 1.000 & 5.000 \\ 5.000 & -1.000 & 2.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 10.000 \\ -10.000 \end{bmatrix}$$

Первый этап. Строим расширенную матрицу и преобразуем её к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 5 & -1 & 2 & -10 \end{array} \right]$$

На первом шаге преобразования $k=1$ наибольший по абсолютной величине элемент в первом столбце (5) расположен в третьей строке матрицы, поэтому меняем первую и третью строки и производим необходимые преобразования.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 1.4 & 4.2 & 14 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \end{array} \right]$$

На втором шаге преобразования $k=2$ наибольший по абсолютной величине элемент во втором столбце (6.2) расположен в третьей строке матрицы, поэтому меняем вторую и третью строки и производим необходимые преобразования.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \\ 0 & 1.4 & 4.2 & 14 \end{array} \right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 1.4 & 4.2 & 14 \\ 0 & 0 & 4.516 & 13.548 \end{array} \right]$$

Второй этап. Вычисляем неизвестные.

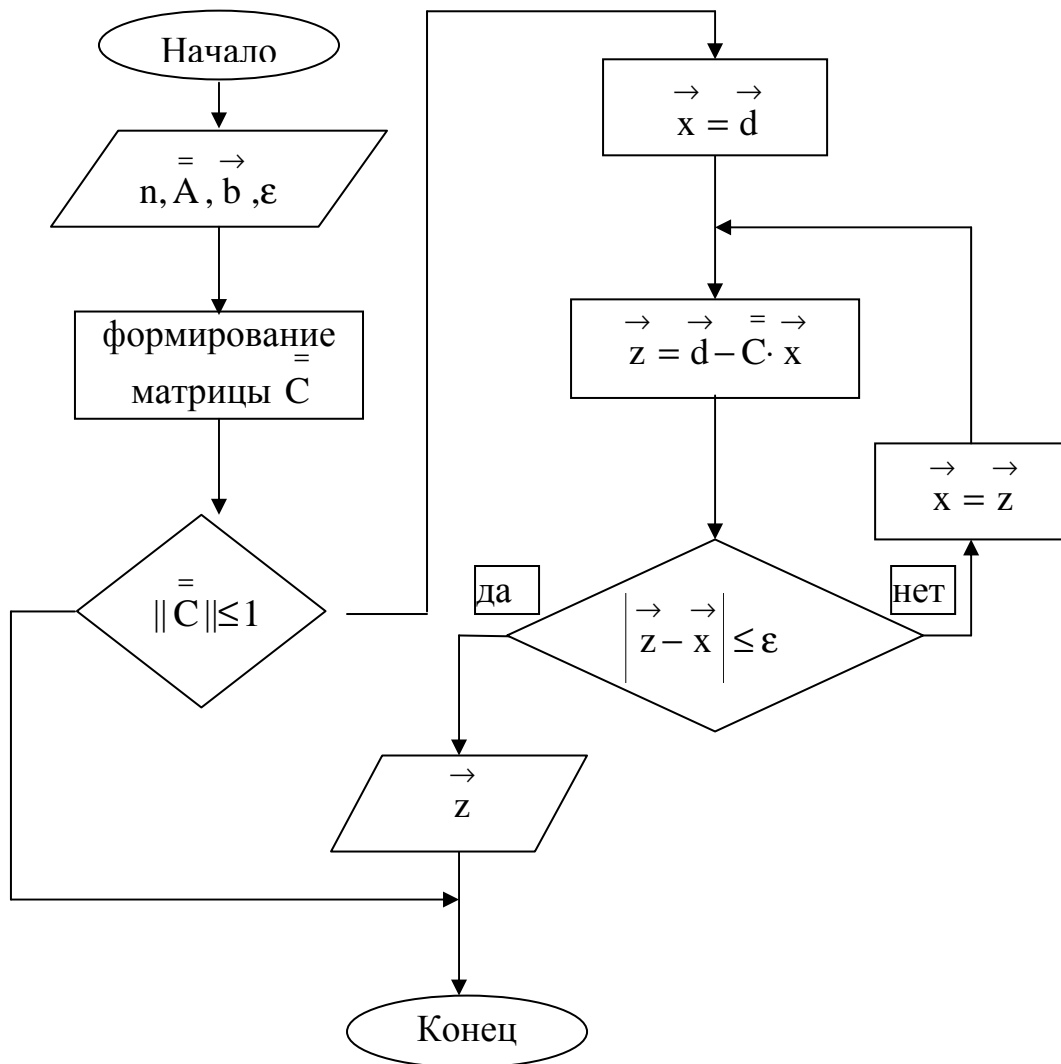
$$x_3 = \frac{13.548}{4.516} = 3$$

$$x_2 = \frac{(2 + 1.4 \cdot 3)}{6.2} = \frac{6.2}{6.2} = 1$$

$$x_1 = \frac{-10 - ((-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3)}{5} = -3$$

ответ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Блок-схема метода простых итераций



Пример. Решить СЛАУ методом простых итераций $\varepsilon=0.1$.

$$\begin{bmatrix} -7.000 & -2.000 & 2.000 \\ 1.000 & -7.000 & -3.000 \\ -3.000 & -1.000 & -5.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.000 \\ -7.000 \\ -5.000 \end{bmatrix}$$

Преобразуем исходную систему к итерационному виду.

$$\vec{x}^k = \vec{d} - \bar{C} \cdot \vec{x}^{k-1}, \quad k=1,2,3,\dots$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0.000 & -0.286 & 0.286 \\ 0.143 & 0.000 & -0.429 \\ -0.600 & -0.200 & 0.000 \end{bmatrix} \quad \|\bar{C}\| = 0.876 < 1$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix} \quad \vec{x}^0 = \vec{d}$$

Результаты уточнения решения СЛАУ методом простых итераций

k	\vec{d}	\bar{C}	\vec{x}^{k-1}	\vec{x}^k	$\Delta \vec{x}$	$\ \Delta \vec{x}\ $
1	1.000	+ $\begin{bmatrix} 0.000 & -0.286 & 0.286 \\ 0.143 & 0.000 & -0.429 \\ -0.600 & -0.200 & 0.000 \end{bmatrix}$	1.000	1.000	0.000	0.849
	1.000		1.000	= 0.714	-0.286	
	1.000		1.000	= 0.200	-0.800	
2	1.000	+ $\begin{bmatrix} 0.000 & -0.286 & 0.286 \\ 0.143 & 0.000 & -0.429 \\ -0.600 & -0.200 & 0.000 \end{bmatrix}$	1.000	0.853	-0.147	0.377
	1.000		0.714	= 1.057	0.343	
	1.000		0.200	= 0.257	0.057	
3	1.000	+ $\begin{bmatrix} 0.000 & -0.286 & 0.286 \\ 0.143 & 0.000 & -0.429 \\ -0.600 & -0.200 & 0.000 \end{bmatrix}$	0.853	0.771	-0.082	0.095
	1.000		1.057	= 1.012	-0.045	
	1.000		0.257	= 0.277	0.020	
4	1.000	+ $\begin{bmatrix} 0.000 & -0.286 & 0.286 \\ 0.143 & 0.000 & -0.429 \\ -0.600 & -0.200 & 0.000 \end{bmatrix}$	0.771	0.790	0.019	0.064
	1.000		1.012	= 0.992	-0.020	
	1.000		0.277	= 0.335	0.058	
5	1.000	+ $\begin{bmatrix} 0.000 & -0.286 & 0.286 \\ 0.143 & 0.000 & -0.429 \\ -0.600 & -0.200 & 0.000 \end{bmatrix}$	0.790	0.812	0.022	0.032
	1.000		0.992	= 0.969	-0.022	
	1.000		0.335	= 0.328	-0.007	

6	1.000	0.000	-0.286	0.286	0.812	0,817	0,004	
	1.000	0.143	0.000	-0.429	0.969	0,976	0,006	0,012
	1.000	-0.600	-0.200	0.000	0.328	0,319	-0,009	
7	1.000	0.000	-0.286	0.286	0,817	0,810	-0,002	
	1.000	0.143	0.000	-0.429	0,976	0,981	0,001	0,003
	1.000	-0.600	-0.200	0.000	0,319	0,317	0,002	

$$\text{ответ } x = \begin{bmatrix} 0.812 \\ 0.969 \\ 0.328 \end{bmatrix}$$

Задания. Решить СЛАУ методом Гаусса и методом простых итераций при $\varepsilon = 0.1$.

вариант:1	вариант:8
-7.000 2.000 -2.000 -7.000	4.000 0.000 2.000 4.000
-2.000 5.000 -2.000 5.000	1.000 -5.000 -3.000 -5.000
-3.000 -1.000 -5.000 -5.000	1.000 2.000 5.000 5.000
вариант:2	вариант:9
-7.000 -1.000 -3.000 -7.000	5.000 -2.000 -3.000 5.000
2.000 -7.000 -2.000 -7.000	2.000 5.000 0.000 5.000
2.000 -1.000 5.000 5.000	2.000 1.000 -6.000 -6.000
вариант:3	вариант:10
-6.000 1.000 2.000 -6.000	-7.000 0.000 -2.000 -7.000
1.000 -6.000 -3.000 -6.000	2.000 -7.000 -2.000 -7.000
-2.000 -1.000 -6.000 -6.000	0.000 2.000 -6.000 -6.000
вариант:4	вариант:11
5.000 -2.000 -1.000 5.000	-7.000 -2.000 -2.000 -7.000
-3.000 6.000 -2.000 6.000	0.000 -5.000 -2.000 -5.000
1.000 2.000 -5.000 -5.000	-3.000 0.000 5.000 5.000
вариант:5	вариант:12
6.000 1.000 -3.000 6.000	5.000 -3.000 -3.000 5.000
-3.000 -7.000 0.000 -7.000	-3.000 -7.000 1.000 -7.000
-3.000 0.000 -7.000 -7.000	1.000 -1.000 4.000 4.000
вариант:6	вариант:13
5.000 0.000 1.000 5.000	-5.000 1.000 -1.000 -5.000
1.000 4.000 -2.000 4.000	-1.000 5.000 1.000 5.000
1.000 0.000 6.000 6.000	-3.000 -3.000 -7.000 -7.000
вариант:7	вариант:14
4.000 2.000 -2.000 4.000	-7.000 -2.000 1.000 -7.000
1.000 -6.000 -3.000 -6.000	-2.000 4.000 -2.000 4.000
1.000 -1.000 6.000 6.000	-1.000 2.000 -6.000 -6.000

вариант:15				вариант:25			
-6.000	0.000	1.000	-6.000	-7.000	-3.000	-2.000	-7.000
2.000	-6.000	-1.000	-6.000	-3.000	-5.000	-1.000	-5.000
-2.000	1.000	5.000	5.000	-1.000	-3.000	-5.000	-5.000
вариант:16				вариант:26			
4.000	1.000	-1.000	4.000	4.000	-1.000	1.000	4.000
0.000	4.000	2.000	4.000	1.000	4.000	-2.000	4.000
1.000	-3.000	-5.000	-5.000	-1.000	0.000	6.000	6.000
вариант:17				вариант:27			
-5.000	-3.000	-3.000	-5.000	4.000	-2.000	1.000	4.000
0.000	5.000	-3.000	5.000	0.000	6.000	-1.000	6.000
2.000	2.000	5.000	5.000	-1.000	0.000	5.000	5.000
вариант:18				вариант:28			
6.000	-2.000	1.000	6.000	-5.000	-2.000	1.000	-5.000
1.000	-5.000	0.000	-5.000	2.000	5.000	2.000	5.000
-3.000	-2.000	6.000	6.000	-2.000	1.000	-6.000	-6.000
вариант:19				вариант:29			
-5.000	-3.000	2.000	-5.000	-6.000	1.000	-1.000	-6.000
-2.000	-7.000	-3.000	-7.000	2.000	-6.000	-3.000	-6.000
2.000	0.000	5.000	5.000	-2.000	2.000	-6.000	-6.000
вариант:20				вариант:30			
-7.000	1.000	-3.000	-7.000	6.000	1.000	2.000	6.000
-2.000	6.000	0.000	6.000	-2.000	-5.000	2.000	-5.000
-2.000	-1.000	6.000	6.000	-3.000	-2.000	-7.000	-7.000
вариант:21				вариант:31			
-5.000	-1.000	-1.000	-5.000	4.000	-1.000	-3.000	4.000
-3.000	6.000	1.000	6.000	-3.000	5.000	-2.000	5.000
-2.000	2.000	-5.000	-5.000	-1.000	0.000	-6.000	-6.000
вариант:22				вариант:32			
-7.000	2.000	-1.000	-7.000	-7.000	-2.000	-3.000	-7.000
-2.000	5.000	0.000	5.000	1.000	-6.000	1.000	-6.000
-3.000	0.000	6.000	6.000	0.000	0.000	6.000	6.000
вариант:23							
4.000	-2.000	-1.000	4.000				
-2.000	-6.000	1.000	-6.000				
2.000	0.000	5.000	5.000				
вариант:24							
4.000	-3.000	1.000	4.000				
-3.000	-6.000	2.000	-6.000				
1.000	-1.000	6.000	6.000				