

дифференциальные уравнения

Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на равномерной сетке отрезка (a,b) один раз с числом разбиения отрезка $n=5$, другой - с числом разбиения отрезка $n=10$ методом Эйлера и модифицированным методом Эйлера. Результаты представить в виде таблиц, а также отобразить на графике.

Пример оформления задания

$yy' + x = 0$	$y _{x=0} = 1$	$0 \leq x \leq 0.8$	$y_{теор} = \sqrt{1-x^2}$
---------------	----------------	---------------------	---------------------------

Приведение уравнения к явному виду: $y' = f(x, y) = -\frac{x}{y}$

Итерационная формула метод Эйлера $y^{(i+1)} = y^{(i)} + h \cdot f(x^{(i)}, y^{(i)})$

Итерационная формула модифицированного метод Эйлера $y^{(i+1)} = y^{(i)} + h \cdot f(x^{(i+\frac{1}{2})}, y^{(i+\frac{1}{2})})$,

где $x^{(i+\frac{1}{2})} = x + \frac{h}{2}$; $y^{(i+\frac{1}{2})} = y^{(i)} + \frac{h}{2} f(x^{(i)}, y^{(i)})$

Метод Эйлера

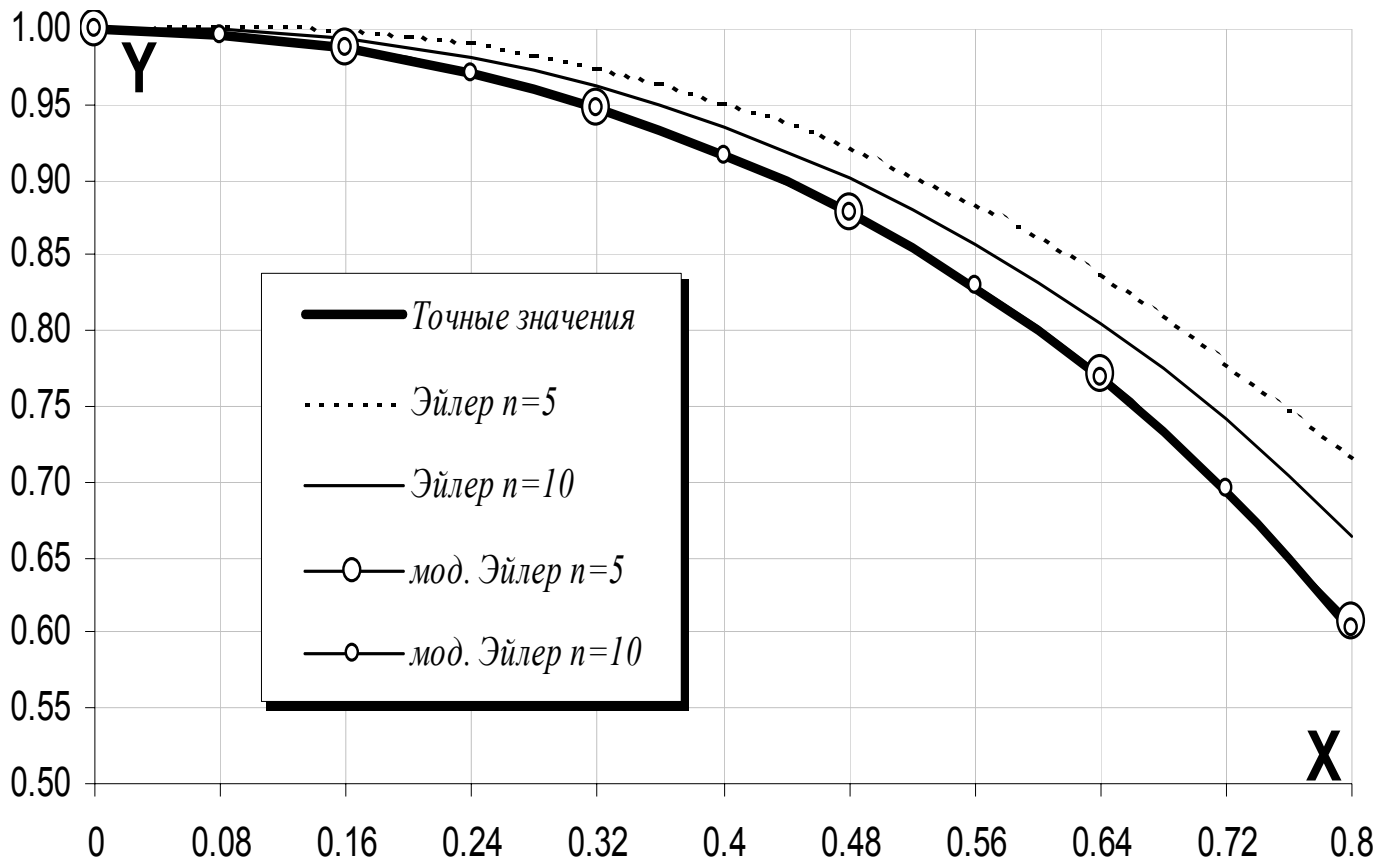
Модифицированный метод Эйлера

$n=5 \quad h=0.16$

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$f(x^{(i)}, y^{(i)})$	$y^{(i+1)}$	$y_{теор}^i$	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$f(x^{(i)}, y^{(i)})$	$y^{(i+1/2)}$	$f(x^{(i+1/2)}, y^{(i+1/2)})$	$y^{(i+1)}$	$y_{теор}^i$
0	0,000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,000	1,0000	0,0000	1,0000	-0,0800	0,9872	1,0000
1	0,160	1,0000	-0,1600	0,9744	0,9871	0,160	0,9872	-0,1621	0,9742	-0,2463	0,9477	0,9871
2	0,320	0,9744	-0,3284	0,9219	0,9474	0,320	0,9478	-0,3376	0,9208	-0,4344	0,8782	0,9474
3	0,480	0,9219	-0,5207	0,8385	0,8773	0,480	0,8783	-0,5465	0,8346	-0,6710	0,7709	0,8773
4	0,640	0,8385	-0,7632	0,7164	0,7684	0,640	0,7709	-0,8302	0,7045	-1,0220	0,6074	0,7684
5	0,800	0,7164			0,6000	0,800	0,6074					0,6000

$n=10 \quad h=0.08$

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$f(x^{(i)}, y^{(i)})$	$y^{(i+1)}$	$y_{теор}^i$	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$f(x^{(i)}, y^{(i)})$	$y^{(i+1/2)}$	$f(x^{(i+1/2)}, y^{(i+1/2)})$	$y^{(i+1)}$	$y_{теор}^i$
0	0,000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000	0,000	1,0000	0,0000	1,0000	-0,0400	0,9968	1,0000
1	0,080	1,0000	-0,0800	0,9936	0,9968	0,080	0,9968	-0,0803	0,9936	-0,1208	0,9871	0,9968
2	0,160	0,9936	-0,1610	0,9807	0,9871	0,160	0,9871	-0,1621	0,9807	-0,2039	0,9708	0,9871
3	0,240	0,9807	-0,2447	0,9611	0,9708	0,240	0,9708	-0,2472	0,9609	-0,2914	0,9475	0,9708
4	0,320	0,9611	-0,3329	0,9345	0,9474	0,320	0,9475	-0,3377	0,9340	-0,3854	0,9166	0,9474
5	0,400	0,9345	-0,4280	0,9003	0,9165	0,400	0,9167	-0,4364	0,8992	-0,4893	0,8775	0,9165
6	0,480	0,9003	-0,5332	0,8576	0,8773	0,480	0,8775	-0,5470	0,8557	-0,6077	0,8289	0,8773
7	0,560	0,8576	-0,6530	0,8054	0,8285	0,560	0,8289	-0,6756	0,8019	-0,7482	0,7690	0,8285
8	0,640	0,8054	-0,7947	0,7418	0,7684	0,640	0,7691	-0,8322	0,7358	-0,9242	0,6951	0,7684
9	0,720	0,7418	-0,9706	0,6641	0,6940	0,720	0,6951	-1,0358	0,6537	-1,1626	0,6021	0,6940
10	0,800	0,6641			0,6000	0,800	0,6021					0,6000



Задания

1	$x^2 y' - 1 = xy$	$y _{x=1} = 0$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$
2	$yy' + 2x = y^2$	$y _{x=0} = 1$	$0 \leq x \leq 1$	$y_{\text{теор}} = \sqrt{2x+1}$
3	$xy' - 3y = x^2$	$y _{x=1} = 0$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = x^2(x-1)$
4	$y' = xy$	$y _{x=0} = 1$	$0 \leq x \leq 1$	$y_{\text{теор}} = e^{\frac{x^2}{2}}$
5	$x^2 y' - y^2 = xy$	$y _{x=1} = 1$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = \frac{x}{1 - \ln x}$
6	$xy' + y - 1 = \ln x$	$y _{x=1} = 0$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = \ln x$
7	$xy' - x = y$	$y _{x=1} = 0$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = x \ln x$
8	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$	$y _{x=0} = 0$	$0 \leq x \leq 1$	$y_{\text{теор}} = \frac{1}{2} x^2 e^{-x^2}$
9	$y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$	$y _{x=0} = 0$	$0 \leq x \leq 1$	$y_{\text{теор}} = \sin x + e^{-\sin x} - 1$
10	$y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$	$y _{x=0} = -1$	$0 \leq x \leq 1$	$y_{\text{теор}} = (1 - 2 \cos x) \cos x$
11	$xy' - y^2 \ln x + y = 0$	$y _{x=1} = 1$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = \frac{1}{1 + \ln x}$
12	$xy' = x + y + xe^{y/x}$	$y _{x=1} = 0$	$1 \leq x \leq 1.9$	$y_{\text{теор}} = x \ln \frac{x}{2-x}$
13	$x^2 y' - y = x^2 e^{\frac{x-1}{x}}$	$y _{x=1} = 1$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = e^{\frac{x^2-1}{x}}$
14	$(x^2 + 1)y' + xy = 1$	$y _{x=0} = 0$	$0 \leq x \leq 1$	$y_{\text{теор}} = \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}}$
15	$xy' - y = \frac{x}{\ln x}$	$y _{x=e} = 0$	$e \leq x \leq e+1$	$y_{\text{теор}} = x \ln \ln x$
16	$xy' - y = x^2 \sin x$	$y _{x=\frac{\pi}{2}} = 0$	$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 1$	$y_{\text{теор}} = -x \cos x$
17	$xy' + y = x \sin x$	$y _{x=\frac{\pi}{2}} = 0$	$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 1$	$y_{\text{теор}} = \frac{\sin(x) - 1}{x} - \cos x$
18	$y' + e^{x-y} = e^{x(1-x)} + 2x$	$y _{x=0} = 0$	$0 \leq x \leq 1$	$y_{\text{теор}} = x^2$
19	$xy' = y \ln y$	$y _{x=1} = e$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = e^x$
20	$xy' - y(\ln(xy) - 1) = 0$	$y _{x=1} = e$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = \frac{e^x}{x}$
21	$xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$	$y _{x=1} = \frac{\pi}{2}$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = 2x \operatorname{arctg} x$
22	$x^2 y' = (x-1)y$	$y _{x=1} = e$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = x e^{\frac{1}{x}}$
23	$(x^2 + 1)y' + xy = x(x^2 + 1)$	$y _{x=\sqrt{2}} = 1$	$\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} + 1$	$y_{\text{теор}} = \frac{x^2 + 1}{3}$
24	$y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$	$y _{x=e} = \frac{e^2}{2}$	$e \leq x \leq e+1$	$y_{\text{теор}} = \frac{x^2}{2} \ln x$
25	$y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$	$y _{x=\frac{\pi}{2}} = 0$	$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 1$	$y_{\text{теор}} = \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \sin x$

26	$\frac{x+y}{y'} - 1 = 0$	$y _{x=0} = 1$	$0 \leq x \leq 1$	$y_{\text{теор}} = 2e^x - x - 1$
27	$(1-x^2)y' - (1+y^2) = 0$	$y _{x=2} = 1$	$2 \leq x \leq 3$	$y_{\text{теор}} = \frac{1+x}{1-x}$
28	$x(y^2+1) + yy'(1-x^2) = 0$	$y _{x=1,5} = 1,5$	$1.5 \leq x \leq 2.5$	$y_{\text{теор}} = \sqrt{-2.6(1-x^2) - 1}$
29	$xyy' = 1 - x^2$	$y _{x=0,5} = 1.3$	$0.5 \leq x \leq 1.5$	$y_{\text{теор}} = \sqrt{\ln(27.835) + \ln(x^2) - x^2}$
30	$y'y^2 + 2x = 1$	$y _{x=0} = 1$	$0 \leq x \leq 1$	$y_{\text{теор}} = \sqrt[3]{3x(1-x) + 1}$
31	$y'x + y = y^2$	$y _{x=1} = 0.5$	$1 \leq x \leq 2$	$y_{\text{теор}} = \frac{1}{1+x}$
32	$\frac{1}{10^{(x+y)}} y' = 1$	$y _{x=2,5} = -2.8656$	$2.5 \leq x \leq 3.0$	$y_{\text{теор}} = -\frac{\ln(1050 - 10^x)}{\ln(10)}$