дифференциальные уравнения

Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на равномерной сетке отрезка (a,b) один раз с числом разбиения отрезка n=5, другой - с числом разбиения отрезка n=10 методом Эйлера и модифицированным методом Эйлера. Результаты представить в виде таблиц, а также отобразить на графике.

Пример оформления задания

$yy' + x = 0$	$y\|_{x=0} = 1$	$0 \le x \le 0.8$	$y_{\text{теор}} = \sqrt{1-x^2}$

Приведение уравнения к явному виду: $y' = f(x,y) = -\dfrac{x}{y}$

Итерационная формула метод Эйлера $y^{(i+1)} = y^{(i)} + h \cdot f(x^{(i)}, y^{(i)})$

Итерационная формула модифицированного метод Эйлера $y^{(i+1)} = y^{(i)} + h \cdot f(x^{(i+1/2)}, y^{(i+1/2)})$,

где $x^{(i+1/2)} = x + h/2$; $y^{(i+1/2)} = y^{(i)} + \dfrac{h}{2} f(x^{(i)}, y^{(i)})$

Метод Эйлера — Модифицированный метод Эйлера

n=5 h=0.16

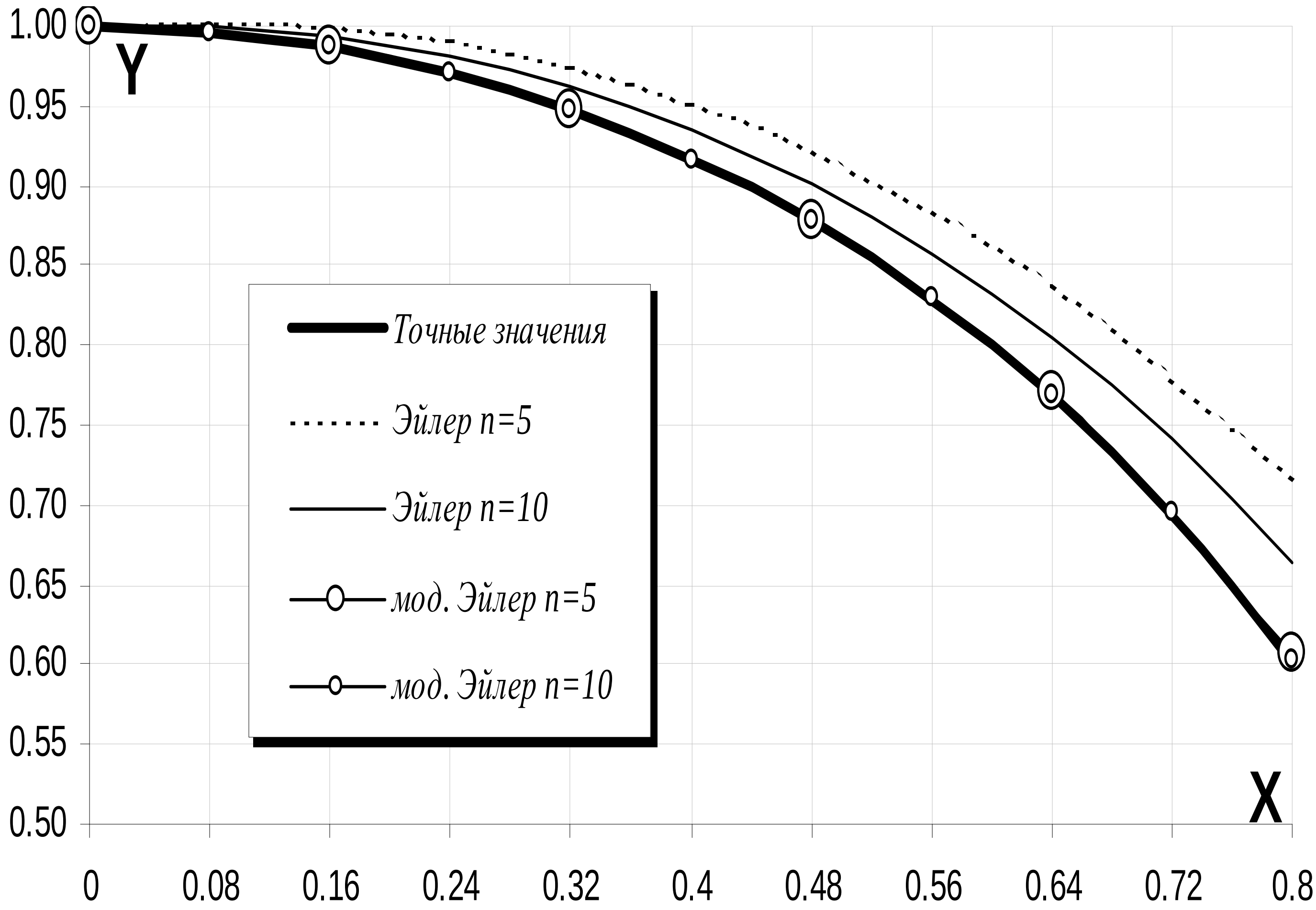
i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$f(x^{(i)},y^{(i)})$	$y^{(i+1)}$	$y^i_{теор.}$
0	0,000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
1	0,160	1,0000	-0,1600	0,9744	0,9871
2	0,320	0,9744	-0,3284	0,9219	0,9474
3	0,480	0,9219	-0,5207	0,8385	0,8773
4	0,640	0,8385	-0,7632	0,7164	0,7684
5	0,800	0,7164			0,6000

$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$f(x^{(i)},y^{(i)})$	$y^{(i+1/2)}$	$f(x^{(i+1/2)},y^{(i+1/2)})$	$y^{(i+1)}$	$y^i_{теор.}$
0,000	1,0000	0,0000	1,0000	-0,0800	0,9872	1,0000
0,160	0,9872	-0,1621	0,9742	-0,2463	0,9477	0,9871
0,320	0,9478	-0,3376	0,9208	-0,4344	0,8782	0,9474
0,480	0,8783	-0,5465	0,8346	-0,6710	0,7709	0,8773
0,640	0,7709	-0,8302	0,7045	-1,0220	0,6074	0,7684
0,800	0,6074					0,6000

n=10 h=0.08

i	$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$f(x^{(i)},y^{(i)})$	$y^{(i+1)}$	$y^i_{теор.}$
0	0,000	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
1	0,080	1,0000	-0,0800	0,9936	0,9968
2	0,160	0,9936	-0,1610	0,9807	0,9871
3	0,240	0,9807	-0,2447	0,9611	0,9708
4	0,320	0,9611	-0,3329	0,9345	0,9474
5	0,400	0,9345	-0,4280	0,9003	0,9165
6	0,480	0,9003	-0,5332	0,8576	0,8773
7	0,560	0,8576	-0,6530	0,8054	0,8285
8	0,640	0,8054	-0,7947	0,7418	0,7684
9	0,720	0,7418	-0,9706	0,6641	0,6940
10	0,800	0,6641			0,6000

$x^{(i)}$	$y^{(i)}$	$f(x^{(i)},y^{(i)})$	$y^{(i+1/2)}$	$f(x^{(i+1/2)},y^{(i+1/2)})$	$y^{(i+1)}$	$y^i_{теор.}$
0,000	1,0000	0,0000	1,0000	-0,0400	0,9968	1,0000
0,080	0,9968	-0,0803	0,9936	-0,1208	0,9871	0,9968
0,160	0,9871	-0,1621	0,9807	-0,2039	0,9708	0,9871
0,240	0,9708	-0,2472	0,9609	-0,2914	0,9475	0,9708
0,320	0,9475	-0,3377	0,9340	-0,3854	0,9166	0,9474
0,400	0,9167	-0,4364	0,8992	-0,4893	0,8775	0,9165
0,480	0,8775	-0,5470	0,8557	-0,6077	0,8289	0,8773
0,560	0,8289	-0,6756	0,8019	-0,7482	0,7690	0,8285
0,640	0,7691	-0,8322	0,7358	-0,9242	0,6951	0,7684
0,720	0,6951	-1,0358	0,6537	-1,1626	0,6021	0,6940
0,800	0,6021					0,6000



1.00
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
Y
X
0
0.08
0.16
0.24
0.32
0.4
0.48
0.56
0.64
0.72
0.8
Точные значения
Эйлер n=5
Эйлер n=10
мод. Эйлер n=5
мод. Эйлер n=10

Задания.

Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

1	$x^2 y' - 1 = xy$	$y\|_{x=1} = 0$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$
2	$yy' + 2x = y^2$	$y\|_{x=0} = 1$	$0 \le x \le 1$	$y_{\text{теор}} = \sqrt{2x+1}$
3	$xy' - 3y = x^2$	$y\|_{x=1} = 0$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = x^2(x-1)$
4	$y' = xy$	$y\|_{x=0} = 1$	$0 \le x \le 1$	$y_{\text{теор}} = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$
5	$x^2 y' - y^2 = xy$	$y\|_{x=1} = 1$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = \frac{x}{1 - \ln x}$
6	$xy' + y - 1 = \ln x$	$y\|_{x=1} = 0$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = \ln x$
7	$xy' - x = y$	$y\|_{x=1} = 0$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = x \ln x$
8	$y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}$	$y\|_{x=0} = 0$	$0 \le x \le 1$	$y_{\text{теор}} = \frac{1}{2} x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$
9	$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$	$y\|_{x=0} = 0$	$0 \le x \le 1$	$y_{\text{теор}} = \sin x + \mathrm{e}^{-\sin x} - 1$
10	$y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$	$y\|_{x=0} = -1$	$0 \le x \le 1$	$y_{\text{теор}} = (1 - 2\cos x)\cos x$
11	$xy' - y^2 \ln x + y = 0$	$y\|_{x=1} = 1$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = \frac{1}{1 + \ln x}$
12	$xy' = x + y + x\mathrm{e}^{y/x}$	$y\|_{x=1} = 0$	$1 \le x \le 1.9$	$y_{\text{теор}} = x \ln \frac{x}{2 - x}$
13	$x^2 y' - y = x^2 \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x}}$	$y\|_{x=1} = 1$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = \mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{x}}$
14	$(x^2+1)y' + xy = 1$	$y\|_{x=0} = 0$	$0 \le x \le 1$	$y_{\text{теор}} = \frac{\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$
15	$xy' - y = \frac{x}{\ln x}$	$y\|_{x=\mathrm{e}} = 0$	$\mathrm{e} \le x \le \mathrm{e}+1$	$y_{\text{теор}} = x \ln\ln x$
16	$xy' - y = x^2 \sin x$	$y\|_{x=\frac{p}{2}} = 0$	$\frac{p}{2} \le x \le \frac{p}{2} + 1$	$y_{\text{теор}} = -x\cos x$
17	$xy' + y = x\sin x$	$y\|_{x=\frac{p}{2}} = 0$	$\frac{p}{2} \le x \le \frac{p}{2} + 1$	$y_{\text{теор}} = \frac{\sin(x) - 1}{x} - \cos x$
18	$y' + \mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^{x(1-x)} + 2x$	$y\|_{x=0} = 0$	$0 \le x \le 1$	$y_{\text{теор}} = x^2$
19	$xy' = y\ln y$	$y\|_{x=1} = \mathrm{e}$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = \mathrm{e}^x$
20	$xy' - y(\ln(xy) - 1) = 0$	$y\|_{x=1} = \mathrm{e}$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$
21	$xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$	$y\|_{x=1} = \frac{p}{2}$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = 2x \operatorname{arctg} x$
22	$x^2 y' = (x-1)y$	$y\|_{x=1} = \mathrm{e}$	$1 \le x \le 2$	$y_{\text{теор}} = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
23	$(x^2+1)y' + xy = x(x^2+1)$	$y\|_{x=\sqrt{2}} = 1$	$\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} + 1$	$y_{\text{теор}} = \frac{x^2+1}{3}$
24	$y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x$	$y\|_{x=\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2}$	$\mathrm{e} \le x \le \mathrm{e}+1$	$y_{\text{теор}} = \frac{x^2}{2}\ln x$
25	$y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x$	$y\|_{x=\frac{p}{2}} = 0$	$\frac{p}{2} \le x \le \frac{p}{2} + 1$	$y_{\text{теор}} = \left(x - \frac{p}{2}\right)\sin x$

26	$\dfrac{x+y}{y'}-1=0$	$y\|_{x=0}=1$	$0\le x\le 1$	$y_{\text{теор}}=2e^{x}-x-1$
27	$(1+x^2)y'-(1+y^2)=0$	$y\|_{x=2}=-3$	$2\le x\le 3$	$y_{\text{теор}}=\dfrac{1+x}{1-x}$
28	$x(y^2+1)+yy'(1-x^2)=0$	$y\|_{x=1,5}=1,5$	$1.5\le x\le 2.5$	$y_{\text{теор}}=\sqrt{-2.6(1-x^2)-1}$
29	$xyy'=1-x^2$	$y\|_{x=0.5}=1.3$	$0.5\le x\le 1.5$	$y_{\text{теор}}=\sqrt{\ln(27.835)+\ln(x^2)-x^2}$
30	$y'y^2+2x=1$	$y\|_{x=0}=1$	$0\le x\le 1$	$y_{\text{теор}}=\sqrt[3]{3x(1-x)+1}$
31	$y'x+y=y^2$	$y\|_{x=1}=0.5$	$1\le x\le 2$	$y_{\text{теор}}=\dfrac{1}{1+x}$
32	$\dfrac{1}{10^{(x+y)}}y'=1$	$y\|_{x=2.5}=-2.8656$	$2.5\le x\le 3.0$	$y_{\text{теор}}=-\dfrac{\ln(1050-10^{x})}{\ln(10)}$