

Многомерная оптимизация

Градиентный метод.

Уточнить минимум функции двух переменных $f(\vec{x}) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$

с точностью $\varepsilon = 0,01$ при $\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $h^{(1)} = 1$ $\vec{G} = \begin{bmatrix} 4 \cdot x_1^3 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2^2 - 42 \cdot x_1 - 14 \\ 4 \cdot x_2^3 + 4 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1^2 - 26 \cdot x_2 - 22 \end{bmatrix}$

i	$\vec{x}^{(k-1)}$	$f(\vec{x}^{(k-1)})$	$\vec{G}^{(k-1)}$	$\vec{V}^{(k-1)}$	$h^{(k)}$	$\vec{x}^{(k)}$	$f(\vec{x}^{(k)})$	$ h^{(k)} \leq \varepsilon$	примечание
1	1,0000 1,0000	106,0000	-46,000 -38,000	-0,771 -0,637	1,000	1,7710 1,6369	45,2739	нет	шаг удачный
2	1,7710 1,6369	45,2739	-49,209 -29,148	-0,860 -0,510	1,000	2,6314 2,1465	3,7799	нет	шаг удачный
3	2,6314 2,1465	3,7799	-19,831 -1,808	-0,996 -0,091	1,000	3,6272 2,2373	21,9738	нет	шаг неудачный
4	2,6314 2,1465	3,7799	-19,831 -1,808	-0,996 -0,091	0,333	2,9630 2,1767	0,4936	нет	шаг удачный
5	2,9630 2,1767	0,4936	0,881 6,017	0,145 0,989	0,333	2,9147 1,8473	0,8844	нет	шаг неудачный
6	2,9630 2,1767	0,4936	0,881 6,017	0,145 0,989	0,111	2,9469 2,0669	0,1099	нет	шаг удачный
7	2,9469 2,0669	0,1099	-2,495 1,313	-0,885 0,466	0,111	3,0451 2,0152	0,0942	нет	шаг удачный
8	3,0451 2,0152	0,0942	3,721 1,432	0,933 0,359	0,111	2,9415 1,9753	0,1629	нет	шаг неудачный
9	3,0451 2,0152	0,0942	3,721 1,432	0,933 0,359	0,037	3,0106 2,0019	0,0046	нет	шаг удачный
10	3,0106 2,0019	0,0046	0,827 0,278	0,948 0,318	0,037	2,9755 1,9901	0,0284	нет	шаг неудачный
11	3,0106 2,0019	0,0046	0,827 0,278	0,948 0,318	0,012	2,9992 1,9981	0,0001	нет	шаг удачный
12	2,9992 1,9981	0,0001	-0,095 -0,080	-0,767 -0,642	0,012	3,0084 2,0058	0,0042	нет	шаг неудачный
13	2,9992 1,9981	0,0001	-0,095 -0,080	-0,767 -0,642	0,004	3,0023 2,0007	0,0002	да	шаг неудачный

Ответ: $\vec{x}^* = \begin{bmatrix} 2,999 \\ 1,998 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix}$ $f(\vec{x}^*) = 0,0001$

Симплексный метод

Уточнить минимум функции двух переменных $f(\vec{x}) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2$

с точностью $\varepsilon = 0,1$ при $\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$ и $h^{(1)} = 1$.

i	$\vec{x}^{(0)}$	$f(\vec{x}^{(0)})$	$\vec{x}^{(1)}$	$f(\vec{x}^{(1)})$	$\vec{x}^{(2)}$	$f(\vec{x}^{(2)})$	h	примечание
1	0,500 0,500	144,125	0,500 1,500	103,625	1,500 0,500	95,625	1,000	$\vec{x}^{(0)}$ отражаем \vec{x}
2	1,500 1,500	63,125	0,500 1,500	103,625	1,500 0,500	95,625	1,000	Удачно отражаем $\vec{x}^{(1)}$
3	1,500 1,500	63,125	2,500 0,500	36,125	1,500 0,500	95,625	1,000	удачно отражаем $\vec{x}^{(2)}$
4	1,500 1,500	63,125	2,5000 0,5000	36,125	2,500 1,500	15,625	1,000	удачно отражаем $\vec{x}^{(0)}$
5	3,500 0,500	13,625	2,500 0,500	36,125	2,500 1,500	15,625	1,000	Удачно отражаем $\vec{x}^{(1)}$
6	3,500 0,500	13,625	3,5000 1,5000	9,125	2,500 1,500	15,625	1,000	Удачно отражаем $\vec{x}^{(2)}$
7	3,500 0,500	13,625	3,5000 1,500	9,125	4,500 0,500	100,125	1,000	не удачно строим нов. симпл.
8	3,500 1,500	9,125	3,500 1,833	9,525	3,833 1,500	27,797	0,333	$\vec{x}^{(2)}$ отражаем \vec{x}
9	3,500 1,500	9,125	3,500 1,833	9,525	3,167 1,833	0,968	0,333	Удачно отражаем $\vec{x}^{(1)}$
10	3,500 1,500	9,125	3,167 1,500	2,787	3,167 1,833	0,968	0,333	Удачно отражаем $\vec{x}^{(0)}$
11	2,834 1,833	1,939	3,167 1,500	2,787	3,167 1,833	0,968	0,333	Удачно отражаем $\vec{x}^{(1)}$
12	2,834 1,833	1,939	2,834 2,166	0,920	3,167 1,833	0,968	0,333	Удачно отражаем $\vec{x}^{(0)}$
13	3,167 2,166	2,167	2,834 2,166	0,920	3,167 1,833	0,968	0,333	не удачно строим нов. симпл.
14	2,834 2,166	0,920	2,834 2,277	1,516	2,945 2,166	0,431	0,111	Удачно отражаем $\vec{x}^{(1)}$
15	2,834 2,166	0,920	2,945 2,055	0,102	2,945 2,166	0,431	0,111	Удачно отражаем $\vec{x}^{(0)}$
16	3,056 2,055	0,233	2,945 2,055	0,102	2,945 2,166	0,431	0,111	Удачно отражаем $\vec{x}^{(2)}$
17	3,056 2,055	0,233	2,945 2,055	0,102	3,056 1,944	0,107	0,111	Удачно отражаем $\vec{x}^{(0)}$

18	2,945 1,944	0,223	2,945 2,055	0,102	3,056 1,944	0,107	0,111	Удачно отражаем $\vec{x}^{(0)}$
19	3,056 2,055	0,233	2,945 2,055	0,102	3,056 1,944	0,107	0,111	не удачно строим нов. симпл.
20	2,945 2,055	0,102	2,945 2,091	0,156	2,981 2,055	0,0451	0,036	отражаем $\vec{x}^{(1)}$
21	2,945 2,055	0,102	2,981 2,019	0,012	2,981 2,055	0,045	0,036	Удачно отражаем $\vec{x}^{(0)}$
22	3,017 2,019	0,023	2,981 2,019	0,012	2,981 2,055	0,045	0,036	Удачно отражаем $\vec{x}^{(2)}$
23	3,017 2,019	0,023	2,9810 2,0190	0,012	3,017 1,983	0,0098	0,036	Удачно отражаем $\vec{x}^{(0)}$
24	2,981 1,983	0,025	2,9810 2,0190	0,012	3,017 1,983	0,0098	0,036	не удачно

Ответ: $\vec{x}^* = \begin{bmatrix} 3,017 \\ 1,983 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,01 \end{bmatrix}$ $f(\vec{x}^*) = 0,0098$

Задания

Уточнить точку минимума для заданной функции двумя методами, с точность $\varepsilon = 0.01$ и $h = 1$

1 $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - x_1 \cdot x_2$ начальное приближение $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

2 $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2 \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2$ начальное приближение $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

3 $f(x_1, x_2) = (2 \cdot x_2 - x_1^2)^2 + 10 \cdot (1 - x_1)^2$ начальное приближение $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

4 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + x_1 - x_2 + 1$ начальное приближение $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5 $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1.1)^2 + (x_2 - 1.1)^2 - x_1 \cdot x_2$ начальное приближение $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

6 $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2 \cdot x_2^2 - 1.1 \cdot x_1 \cdot x_2$ начальное приближение $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$7 \quad f(x_1, x_2) = 1.1 \cdot (2 \cdot x_2 - x_1^2)^2 + 10 \cdot (1 - x_1)^2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$8 \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + 1.1 \cdot x_1 - 1.1 \cdot x_2 + 1$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$9 \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 1.2)^2 + (x_2 - 1.2)^2 - x_1 \cdot x_2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$10 \quad f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2 \cdot x_2^2 - 1.2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$11 \quad f(x_1, x_2) = 1.2 \cdot (2 \cdot x_2 - x_1^2)^2 + 10 \cdot (1 - x_1)^2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$12 \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + 1.2 \cdot x_1 - 1.2 \cdot x_2 + 1$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$13 \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (1.1 \cdot x_2 - 1)^2 - 1.1 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$14 \quad f(x_1, x_2) = 1.1 \cdot x_1^4 + 2 \cdot 1.1 \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$15 \quad f(x_1, x_2) = (2 \cdot x_2 - x_1^2)^2 + 10 \cdot (1.1 - x_1)^2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$16 \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1.1 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 - x_2 + 1.1$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$17 \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 1.1)^2 + (1.1 \cdot x_2 - 1.1)^2 - 1.1 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$18 \quad f(x_1, x_2) = 1.1 \cdot x_1^4 + 2 \cdot 1.1 \cdot x_2^2 - 1.1 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$19 \quad f(x_1, x_2) = 1.1 \cdot (2 \cdot x_2 - x_1^2)^2 + 10 \cdot (1.1 - x_1)^2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$20 \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1.1 \cdot x_1 \cdot x_2 + 1.1 \cdot x_1 - 1.1 \cdot x_2 + 1.1$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$21 \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 1.2)^2 + (1.1 \cdot x_2 - 1.2)^2 - 1.1 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$22 \quad f(x_1, x_2) = 1.1 \cdot x_1^4 + 2 \cdot 1.1 \cdot x_2^2 - 1.2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$23 \quad f(x_1, x_2) = 1.2 \cdot (2 \cdot x_2 - x_1^2)^2 + 10 \cdot (1.1 - x_1)^2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$24 \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1.1 \cdot x_1 \cdot x_2 + 1.2 \cdot x_1 - 1.2 \cdot x_2 + 1.1$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$25 \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (1.2 \cdot x_2 - 1)^2 - 1.2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\text{начальное приближение } \overset{\rightarrow 0}{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$26 \quad f(x_1, x_2) = 1.2 \cdot x_1^4 + 2 \cdot 1.2 \cdot x_2^2 - x_1 \cdot x_2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$27 \quad f(x_1, x_2) = (2 \cdot x_2 - x_1^2)^2 + 10 \cdot (1.2 - x_1)^2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$28 \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1.2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_1 - x_2 + 1.2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$29 \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 1.1)^2 + (1.2 \cdot x_2 - 1.1)^2 - 1.2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$30 \quad f(x_1, x_2) = 1.2 \cdot x_1^4 + 2 \cdot 1.2 \cdot x_2^2 - 1.1 \cdot x_1 \cdot x_2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$31 \quad f(x_1, x_2) = 1.1 \cdot (2 \cdot x_2 - x_1^2)^2 + 10 \cdot (1.2 - x_1)^2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$32 \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1.2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 1.1 \cdot x_1 - 1.1 \cdot x_2 + 1.2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$33 \quad f(x_1, x_2) = (x_1 - 1.2)^2 + (1.2 \cdot x_2 - 1.2)^2 - 1.2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$34 \quad f(x_1, x_2) = 1.2 \cdot x_1^4 + 2 \cdot 1.2 \cdot x_2^2 - 1.2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$35 \quad f(x_1, x_2) = 1.2 \cdot (2 \cdot x_2 - x_1^2)^2 + 10 \cdot (1.2 - x_1)^2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$36 \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1.2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 1.2 \cdot x_1 - 1.2 \cdot x_2 + 1.2$$

начальное приближение $x \stackrel{\rightarrow 0}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$